Escuela Nacional Central de Agricultura

ENCA GUATEMALA

Fundada en 1921

TEXTO DE APOYO

MATEMÁTICA

6665-1345 ext. 212

5711-3603

admision@enca.edu.gt

ÍNDICE

PARTE UNO

PRESENTACIÓN

Esta guía tiene la finalidad de servir como un apoyo en la preparación académica de los aspirantes que se someten al examen de admisión de la ENCA en el área de matemática. Su contenido se centra en los principales temas que serán evaluados en el examen de preselección, aportando algunos conceptos, esquemas y ejemplos, más no se profundiza completamente en éstos, tal como sería el objetivo de un libro. Por esta razón se aconseja que el futuro alumno complemente sus conocimientos con otras fuentes de información. Además, también es aconsejable el apoyo de un tutor, quien puede guiarse con su contenido y utilizar los ejercicios propuestos para aclarar las dudas del tutorado.

Por otra parte, esta guía constituye un documento en proceso continuo de mejoramiento, por lo que cualquier aporte para mejorarla será bienvenido.

CONJUNTOS NUMÉRICOS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS

1. DESARROLLO DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Un sistema de numeración es un conjunto de números y reglas que sirven para determinar todos los números válidos dentro del mismo sistema. Existen muchos sistemas de numeración, los cuales tienen sus propios signos, relaciones, convenios y normas. Su desarrollo se ha dado acorde al desarrollo cognitivo del ser humano en cada civilización y puede ser:

a. Por los instrumentos que ha utilizado el hombre para contar

Durante su desarrollo, el ser humano ha creado instrumentos que le han permitido contar y descubrir las relaciones entre los números según sus sistemas de numeración. En la era primitiva se utilizaron los elementos naturales disponibles como piedras para realizar marcas en los árboles, o bien algunas pinturas para marcar las paredes de las cavernas. Poco a poco se fue evolucionando y se creó el ábaco, un instrumento muy utilizado en la antigua Mesopotamia y en Mesoamérica para realizar operaciones aritméticas sencillas.

Marcas en arboles Piedras Manos	→	Abaco	→	Maquinas para Calcular	→	Computadora

Posteriormente se fueron desarrollando máquinas que utilizaban engranajes para desarrollar cálculos más complejos. Un ejemplo de la antigüedad es el mecanismo de Anticitera, que es considerada “una computadora mecánica”, muy adelantada para su tiempo. Después, el ser humano desarrolló calculadoras mecánicas, digitales y la computadora. ¿Qué se desarrollará después?

b. Por los sistemas de numeración que han creado las civilizaciones

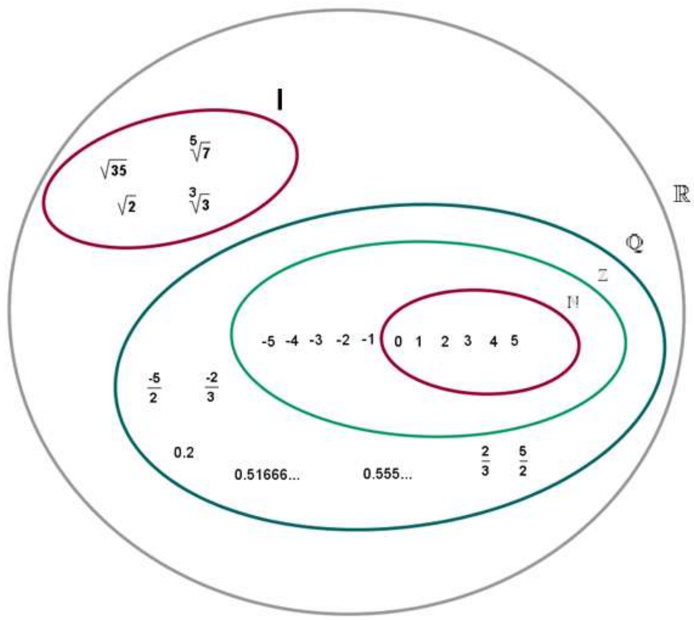
Cada civilización ha tenido su propio desarrollo cognitivo, es decir, ha desarrollado sus propios conocimientos de acuerdo al lugar y a los elementos naturales con los que se ha relacionado. De esta manera, cada civilización ha desarrollado su propio sistema de numeración con sus propias reglas. Entre éstos se ha de destacar el sistema Maya, civilización que consideró al “cero” como un número. Hoy en día, en un mundo más globalizado, el sistema que más se utiliza es el decimal, que para representar a los números utiliza 10 símbolos y entre ellos toma en cuenta al cero.

BABILONICO	EGIPCIO	MAYA	BINARIO	HEXADECIMAL	DECIMAL
5,000 a.C.	3,000 a.C.	300 a.C.	300-1,900 d. de C	400 d. de C	800 d. C
Posicional	No Posicional	Posicional	Posicional	Posicional	Posicional
Base 60	Base 10	Base 20	Base 2	Base 16	Base 10
3 símbolos	7 símbolos	3 símbolos	2 símbolos	16 símbolos	Símbolos 10
Sin cero	Sin Cero	Con cero	Con cero	Con cero	Con cero

2. CLASIFICACIÓN DEL CONJUNTO DE NÚMEROS

Los números se pueden clasificar. El conjunto que los contiene a todos es el conjunto de los números complejos, el cual tiene dos subconjuntos: 1) Números reales (R) y 2) Números imaginarios (i).

El que nos interesa para esta guía es el conjunto de los números reales, que contiene a los números Irracionales (I) y los números Racionales (Q). Estos últimos se pueden clasificar en números Enteros (Z) y números Naturales (N).



Fuente: recuperado de https://bit.ly/2B5yIB0

A continuación se detalla cada uno de estos conjuntos con sus propiedades más importantes:

2.1. NÚMEROS NATURALES (N)

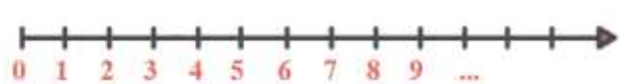
Son los números que se usan para contar. Por ejemplo, cuando se cuentan 5 manzanas, 20 patos, 3 cerdos, etc. Estos números se cuentan de unidad en unidad, es decir, no hay fracciones ni decimales. Se puede representar simbólicamente como:

N = { 0, 1, 2, 3 , 4, 5, 6, 7,……………………………….}

En nuestro caso incluiremos al cero como un número natural.

2.1.1. RECTA NUMÉRICA

La recta numérica es un gráfico. Se dibuja una línea y se colocan los números separados por distancias iguales. La recta numérica de los números naturales es la siguiente:



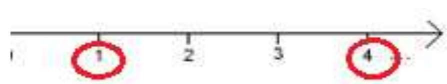
Fuente: recuperado de https://bit.ly/2YM1Dsy

2.1.2. ORDEN EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Al comparar dos números naturales a y b entre ellos se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

- ✓ **a > b** (a es mayor que b), si al representarlos gráficamente en la recta numérica, **a** se encuentra a la derecha de **b**.
- ✓ **a < b** (a es menor que b), si al representarlos gráficamente sobre la recta numérica, **a** se encuentra ubicado a la izquierda de **b**.
- ✓ **a = b** (a es igual a b), si al representarlos en la recta numérica, a **a** y a **b** les corresponde el mismo punto.

¿Qué número es menor, 4 o 1?



1 es menor que 4 porque está a la izquierda que el 4

Fuente: recuperado de https://bit.ly/2KITRpl

2.1.3. OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

A. ADICIÓN

a + b = c donde a, b y c representan a cualquier número natural.
a y b son los sumandos y c es la suma o total.

<u>Propiedades de la adición:</u>

a. Clausurativa (Cerradura): La suma de dos naturales es siempre otro número natural.

$$a + b = c$$

Ejemplo

$$3 + 5 = 8$$

b. **Conmutativa:** El orden en el que se realiza la suma de dos números naturales no altera el resultado. El orden de los sumandos no altera la suma.

$$a + b = b + a$$

Ejemplo

$$2 + 7 = 7 + 2$$
$$9 = 9$$

c. **Asociativa:** Al agrupar los sumandos de diferente forma, siempre se obtiene el mismo resultado.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Ejemplo

$$(5+16) + 4 = 5 + (16+4)$$
$$(21) + 4 = 5 + (20)$$
$$25 = 25$$

d. **Elemento neutro (Modulativa):** La suma de cualquier número natural con el cero da como resultado el mismo número natural. El elemento neutro de la suma es el cero.

$$a + 0 = 0 + a$$

Ejemplo

$$9 + 0 = 0 + 9$$
$$9 = 9$$

B. SUSTRACCIÓN

$a - b = c$, donde a, b y c representan a cualquier número natural.
a es el minuendo, **b** el sustraendo y **c** la diferencia.

C. MULTIPLICACIÓN

$a \times b = c$, donde a, b y c representan a cualquier número natural
a y **b** son factores y **c** es el producto.

Otros signos utilizados en la multiplicación: • , * , ( ) , [ ] , y { }

<u>**Propiedades de la multiplicación:**</u>

a. **Clausurativa:** La multiplicación de dos números naturales siempre da como resultado un número natural.

$$a \times b = c$$

Ejemplo

$$10 \times 7 = 70$$

b. Conmutativa: El orden en el que se realice la multiplicación no altera el resultado.
El orden de los factores no altera el producto.

$$a \times b = b \times a$$

Ejemplo

$$18 \times 3 = 3 \times 18$$
$$54 = 54$$

c. **Asociativa:** No importa cómo se agrupen los factores el producto es igual.

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Ejemplo

$$(8 \times 5) \times 2 = 8 \times (5 \times 2)$$
$$(40) \times 2 = 8 \times (10)$$
$$80 = 80$$

d. **Elemento neutro:** El producto de un número natural con uno da como resultado el mismo número natural.

El elemento neutro de la multiplicación es el uno.

$$a \times 1 = a \quad ó \quad 1 \times a = a$$

Ejemplo $6 \times 1 = 6$

e. **Anulativa:** Todo número multiplicado por cero da como resultado cero.

$$a \times 0 = 0 \quad ó \quad 0 \times a = 0$$

Ejemplo $15 \times 0 = 0$

f. Distributiva:

Con respecto a la suma: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Ejemplo

$$4 \times (10 + 5) = 4 \times 10 + 4 \times 5$$
$$4 \times 15 = 40 + 20$$
$$60 = 60$$

Con respecto a la resta: $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

Ejemplo

$$6 \times (12 - 8) = 6 \times 12 - 6 \times 8$$
$$6 \times 4 = 72 - 48$$
$$24 = 24$$

D. DIVISIÓN

$$d \,\overline{\big|\, D}^{\,C}_{\;R}$$

, donde **d** es el divisor, **D** el dividendo, **C** el cociente y **R** el residuo.

Otros símbolos utilizados en la división: ÷, / , **:** , y —

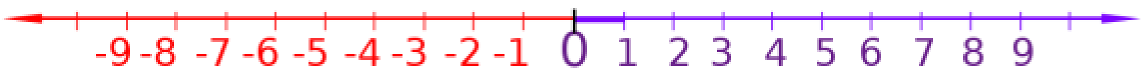
2.2. NÚMEROS ENTEROS (Z)

El conjunto de los números enteros contiene a los números naturales, sus opuestos (números negativos) y el cero. Al igual que los números naturales, se cuentan de unidad en unidad. Simbólicamente, se puede representar como:

Z = {………-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ………}

2.2.1. RECTA NUMÉRICA

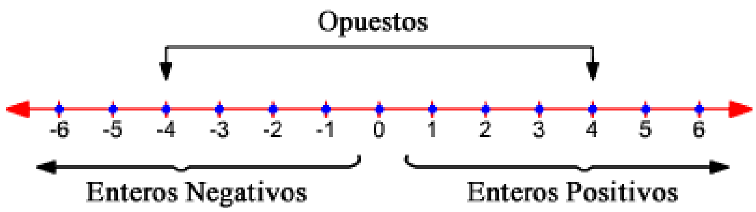
En la recta numérica, los números enteros se representan así:



Fuente: recuperado de https://bit.ly/2YKVyMJ

2.2.2. NÚMEROS OPUESTOS

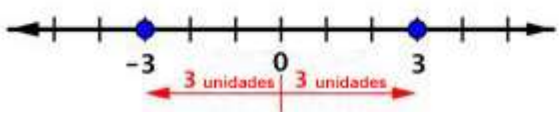
Dos números enteros se llaman así si están a la misma distancia de cero y tienen diferente signo. Es decir, el opuesto de **a** es **–a**. En la siguiente figura se puede ver que 4 y -4 son números opuestos, puesto que ambos están a cuatro unidades de distancia del cero, pero uno es positivo y el otro es negativo.



Fuente: recuperado de https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/integers

2.2.3. VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

Si **a ε Z**, el valor absoluto de **a** se denota **I a I** y es la distancia que existe entre **a** y el **cero**. Por ejemplo, en la siguiente figura se puede observar que el valor absoluto de -3 es 3, y el valor absoluto de 3 también es 3. Esto es debido a que, sin importar el signo que tengan, ambos números están a 3 unidades de distancia del cero.



Fuente: recuperado de https://bit.ly/31HRw53

(El valor absoluto de 0 es 0)

2.2.4. ORDEN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Al comparar dos números enteros a y b, entre ellos se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

- ✓ **a > b** (**a** es mayor que **b**), si al representarlos en la recta numérica, **a** se encuentra a la derecha de **b**.
- ✓ **a < b** (**a** es menor que **b**), si al representarlos gráficamente sobre la recta numérica, **a** se encuentra a la izquierda de **b**.
- ✓ **a = b** (**a** es igual a **b**), si al representarlos en la recta numérica, a **a** y **b** le corresponde el mismo punto.

2.2.5. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ENTEROS

A. ADICIÓN

CASO 1: Adición de dos números enteros de igual signo:
Se suman los valores absolutos de los sumandos y, al resultado, se le antepone el signo común de los sumandos.

Ejemplos: a). 2 + 4 = 6 b) -8 + -19 = -27

CASO 2: Adición de dos números enteros de diferente signo:
Se restan los valores absolutos de los sumandos y al resultado se le antepone el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplos: a). -14 + 3 = -11 b). -10 + 25 = 15

Propiedades de adición de los números enteros:

Además de las 4 propiedades de la adición de los números naturales se agrega la siguiente propiedad.

e. **Inverso aditivo u opuesto:** Todo número entero sumado con su opuesto da como resultado cero.

$$a + (-a) = 0 \quad ó \quad (-a) + a = 0$$

Ejemplo 5 + (-5) = 0

B. SUSTRACCIÓN

Para encontrar la diferencia de dos números enteros, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo. Es decir, a – b = a + (-b).

Ejemplos

a). 34 - 12 = 34 + (-12) = 22
b). 35 – 50 = 35 + (-50) = -15
c). - 25 – 15 = -25 + (-15) = -40
d). 22 - (-10) = 22 + (10) = 32

Supresión de signos de agrupación:

En las expresiones en las cuales se combinan adiciones y sustracciones con números enteros, se utilizan signos de agrupación con el fin de diferenciar el signo del número con respecto al signo de la operación.

Para resolver expresiones de esta clase, se deben eliminar los signos de agrupación teniendo en cuenta lo siguiente:

- ✓ Cuando el signo de agrupación esta precedido por el signo +, se suprime dejando las cantidades que están en su interior con el mismo signo.

Ejemplo

a). (35) + (20) = 35 **+** 20 = 55 b). (16) + (**-** 30) = 16 **–** 30 = -14
c). (**-**60) + (90) = **-**60 + 90 = 30 d). (**-**46) + (**-**34) = **-**46 **–** 34 = - 80

- ✓ Cuando un signo de agrupación va precedido por el signo - , se suprime cambiando de signo las cantidades que se encuentran en su interior.

Ejemplo

a). 78 **–** (43) = 78 **–** 43 = 35 b). 11 **–** (**-** 44) = 11 **+** 44 = 55

C. MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar dos números enteros se debe tener en cuenta lo siguiente:

. Si los números tienen el mismo signo, se multiplican los valores absolutos de cada factor y el producto respectivo es positivo.

Ejemplos:
a). 12 x 5 = 60 b). (-120) x (-3) = 360

. Si los números son de distinto signo, se multiplican los valores absolutos de los factores y el respectivo producto es negativo.

Ejemplos:
a). 33 x (-10) = -330 b). (-60) x 4 = -240

Propiedades de la multiplicación:

Las propiedades que tiene la multiplicación de los números enteros son las mismas 6 que tienen los números naturales**.**

D. DIVISIÓN

Si a, **b ε Z** con **b ≠ 0** se llama cociente exacto de **a** y **b** al número **c ε Z** tal que **b * c = a**

Para hallar el cociente entre dos números enteros se debe de considerar:

- ✓ El cociente de dos números enteros de igual signo es positivo.

Ejemplo a). 12/4 = 3 b). (-50) / (-5) = 10

- ✓ El cociente de dos números enteros de distinto signo es negativo.

Ejemplo a). (-44) / 11 = - 4 b). 360 / (-180) = - 2

- ✓ El cociente de cualquier número entero distinto de cero entre uno es el mismo número entero:

$$a \div 1 = a$$

Ejemplo $5 \div 1 = 5$

Ejemplo $-5 \div 1 = -5$

- ✓ El cociente de cero entre cualquier número entero diferente de cero es cero:

$$0 \div a = 0$$

Ejemplo $0 \div 100 = 0$

- ✓ El cociente de cualquier número entero entre cero no está definido (indefinido)

$$a \div 0 = \text{Indefinido}$$

Ejemplo $3 \div 0 = \text{Indefinido}$

- ✓ El cociente de cero dentro de cero es indeterminado.

Ejemplo $0 \div 0 = \text{Indeterminado}$

2.2.6. JERARQUÍA OPERATIVA:

Norma matemática que nos indica el orden en el cual deben realizarse las operaciones dentro de un complejo de estas, de acuerdo a niveles jerárquicos esta:

Nivel 1:	Se simplifican y se verifican las operaciones contenidas en símbolos de agrupación más internos; luego los más externos. Generalmente en este orden de símbolos. a. ( ) b. [ ] c. { }
Nivel 2:	Funciones
Nivel 3:	Potencias y radicales
Nivel 4:	Multiplicación y división
Nivel 5:	Suma y resta

En ausencia de símbolos de agrupación, por ejemplo, la multiplicación debe de realizarse antes que la adición o la sustracción. **Para operaciones que están en el mismo nivel jerárquico se procede de izquierda a derecha** (Esto significa que tendrá prioridad aquella operación que en su momento aparezca más a la izquierda).

Ejemplos Aplique jerarquía operativa para determinar el resultado correcto:

a. 25 + 3 x 2	Primero se multiplica
25 + 6	Luego se suma
31	**Respuesta**
b. 30 ÷ 15 – 8	Primero se divide
2 – 8	Luego restamos
– 6	**Respuesta**
c. 13 x 11 x 2 ÷ (18 ÷ 9)	Primero se resuelva la operación que está entre paréntesis
13 x 11 x 2 ÷ 2	Después se multiplica (operando de izquierda a derecha)
286 ÷ 2	Finalmente se divide
143	**Respuesta**
d. 15 – 2 [41 – 6 (3 x4 – 7)]	Primero se opera el paréntesis (primero la multiplicación)
15 – 2 [41 – 6 (12 – 7)]	Después operamos la sustracción del paréntesis
15 – 2 [41 – 6 (5)]	Seguimos con las operaciones entre corchetes primero la multiplicación
15 – 2 [41 - 30]	Luego la sustracción que esta entre corchetes
15 – 2 [11]	Multiplicamos antes de restar
15 – 22	Restamos
- 7	**Respuesta**

e. [(2) + (-7)] [(8) – (10)] – 16 x 3 ÷ [(-3) – (9)] [(4) - (-2)] Primero se suprimen paréntesis

[2 - 7] [8 - 10] - 16 x 3 ÷ [-3 - 9] [4 + 2] Se operan corchetes

[- 5] [- 2] - 16 x 3 ÷ [- 12] [6] Se opera [-5] [-2]

10 - 16 x 3 ÷ [- 12] [6] Como la multiplicación y la división tienen igual jerarquía se opera de izquierda a la derecha en el orden que aparezcan las operaciones.

10 - 48 ÷ [-12] [6]

10 + 4 [6]

10 + 24

34 **Respuesta**

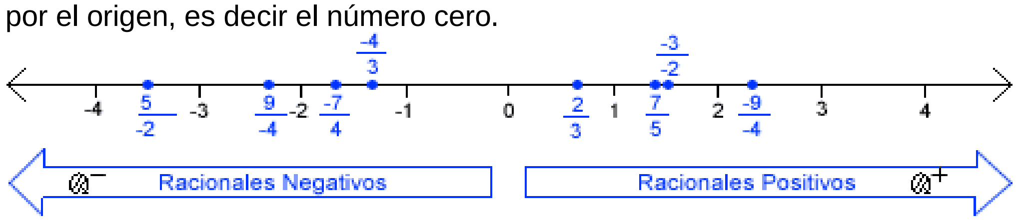
2.3. NÚMEROS RACIONALES (Q)

Los números racionales, son el conjunto de números fraccionarios y números enteros representados por medio de fracciones. Este conjunto está situado en la recta real numérica, pero a diferencia de los números naturales que son consecutivos, los números racionales no poseen consecución pues entre cada número racional existen infinitos números que solo podrían ser escritos durante toda la eternidad.

$$\boldsymbol{Q = \left\{\frac{a}{b} \middle| (a \wedge b) \in Z \wedge n \neq 0 \wedge mcd(a,b) = 1\right\}}$$

2.3.1. RECTA NUMÉRICA

Es un gráfico unidimensional de una línea en la que los números enteros son mostrados como puntos especialmente marcados que están separados uniformemente. La recta numérica incluye todos los números reales, continuando ilimitadamente en cada sentido. Está dividida en dos mitades simétricas por el origen, es decir el número cero.



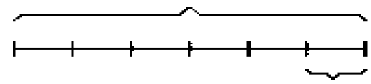
Fuente: elaboración propia.

2.3.2. ELEMENTOS DE UNA FRACCIÓN

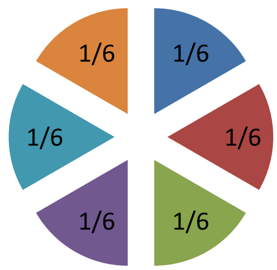
Una fracción consta de dos términos, llamados numerador y denominador. El denominador indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad principal, y el numerador, cuántas de esas partes se toman.

$\frac{1}{6}$ → **Numerador**
→ **Denominador**

1 unidad



$\frac{1}{6}$



Si dividimos la unidad en 6 partes, cada una de ellas representa $\frac{1}{6}$

Fuente: elaboración propia.

2.3.3. TIPOS DE FRACCIONES

A. Fracciones propias e impropias

Las fracciones impropias son las que tienen el numerador más grande que el denominador.

Ejemplo: $\frac{4}{3}$

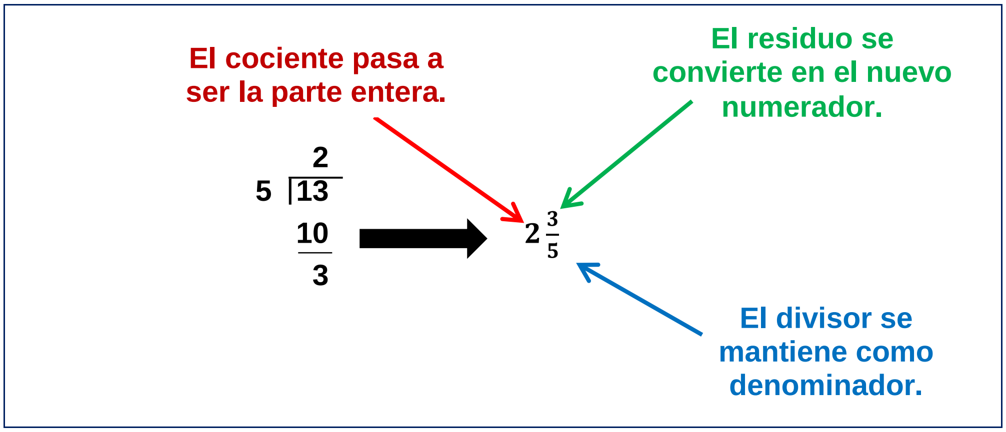
Las fracciones propias son las que tienen el denominador más grande que el numerador.

Ejemplo: $\frac{5}{9}$

2.3.4. NÚMERO MIXTO

De fracción impropia a número mixto

Sea $\frac{13}{5}$
Como el numerador (13) es mayor que el denominador (5), se trata de una fracción impropia, por lo que se debe dividir:



Fuente: elaboración propia.

De número mixto a fracción impropia

Se multiplica la parte entera por el denominador de la parte fraccionaria y se le suma el numerador de la parte fraccionaria y el denominador de la parte fraccionaria divide a todo.

$$2\frac{3}{4} = \frac{(2 * 4) + 3}{4}$$

$$2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

2.3.5. NÚMEROS RACIONALES DECIMALES

Están formados por una parte entera y una parte decimal.

Centenas	Decenas	Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	5.	4	7	9
Parte entera			Parte decimal		

Como se lee: 125 enteros 479 milésimas

Decimales

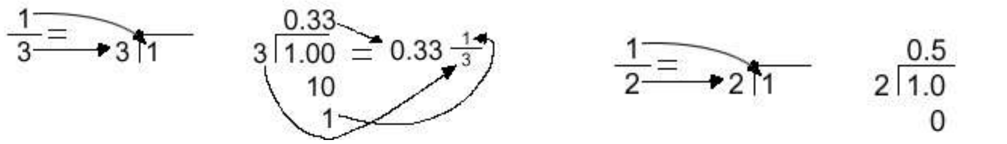
0.573

Unidades	Décima	Centésima	Milésima
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$

Como se lee: 573 milésimas

A. EXPRESIÓN DE FRACCIONES COMO NÚMEROS DECIMALES

Para expresar números racionales en forma decimal se divide el numerador entre el denominador, y el cociente que se obtiene es un numero racional decimal.



$\frac{1}{3} = \mathbf{0.3}$ $\frac{1}{2} = \mathbf{0.5}$

B. REPRESENTACION DECIMAL DE UN NÚMERO RACIONAL

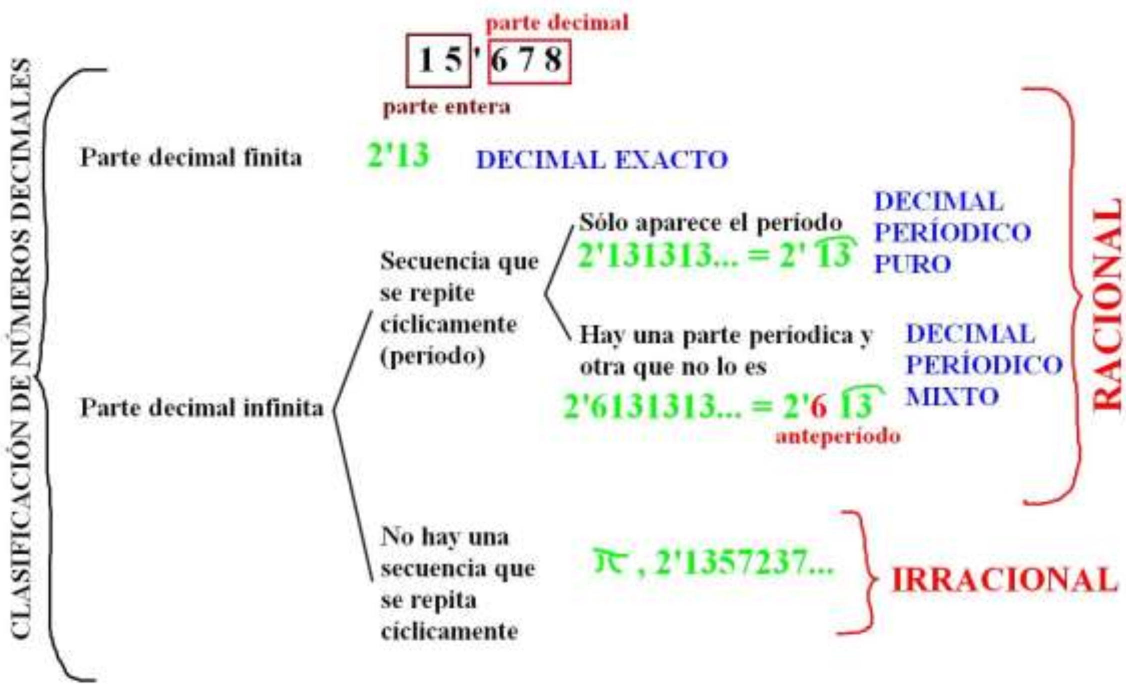
Las fracciones racionales $\frac{7}{10}, \frac{17}{100}, \frac{9}{1000}$, cuyo denominador es una potencia de 10, se les conocen como fracciones decimales.

$$\frac{6}{10} = \mathbf{0.6\ (seis\ décimas)}$$

$$\frac{4}{100} = \mathbf{0.04\ (cuatro\ centésimas)}$$

$$\frac{13}{1000} = \mathbf{0.013\ (trece\ milésimas)}$$

C. CLASIFICACION DE LOS NÚMEROS RACIONALES DECIMALES:



Fuente: Recuperado de http://masmates-igv-2bach.blogspot.com/2010/11/blog-post_22.html

D. CONVERSIÓN DE DECIMAL A RACIONAL

a. De decimal exacto a fracción irreducible

Se escribe en el numerador el número completo sin el punto decimal y en el denominador se escribe un uno y se agregan tantos ceros como cifras (dígitos) tenga la parte decimal. Finalmente, si es posible, se simplifica.

Por ejemplo:

$$\mathbf{0.32 = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}}$$

$$\mathbf{0.08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}}$$

b. De decimal periódico puro a fracción irreducible

En el numerador se escribe el número completo sin el punto decimal y se le resta la parte no periódica, en el denominador se agregar tantos nueves como cifras tenga la parte periódica. Finalmente se simplifica si es posible.

Por ejemplo:

a) $\mathbf{57.\overline{18} = \frac{5718-57}{99} = \frac{5661_{\div 9}}{99_{\div 9}} = \frac{629}{11}}$

b) $\mathbf{1.\overline{13} = \frac{113-1}{99} = \frac{112}{99}}$

c) $\mathbf{0.\overline{1769} = \frac{1769}{9999}}$

d) $\mathbf{2234.\overline{1} = \frac{22341-2234}{9} = \frac{20107}{9}}$

c. De decimal periódico mixto a fracción irreducible

En el numerador se escribe el número completo sin el punto decimal y se le resta la parte no periódica, en el denominador se agregan tantos nueves como cifras tenga la parte periódica y tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica que se encuentra después del punto decimal.

a) $\mathbf{0.424\overline{8}\ldots = \frac{4248-424}{9000} = \frac{3824}{9000} = \frac{478}{1125}}$

b) $\mathbf{0.5\overline{8}\ldots = \frac{58-5}{90} = \frac{53}{90}}$

c) $\mathbf{0.3\overline{42}\ldots = \frac{342-3}{990} = \frac{339}{990} = \frac{113}{330}}$

2.3.6. FACTORIZACIÓN DE NÚMEROS

A. MULTIPLO: M

El múltiplo de un número natural es el producto de este número por cualquier número natural empezando por el cero. Es un conjunto infinito.

Un número es múltiplo de otro cuando lo contiene un número exacto de veces. Por ejemplo: 4 es múltiplo de 2 porque lo contiene 2 veces. Para obtener los múltiplos de un número, lo multiplicamos por cada uno de los números naturales.

4*0	4*1	4*2	4*3	4*4	4*5	4*6	4*7	4*8	…
0	4	8	12	16	20	24	28	32	…

B. DIVISOR: D

Divisor de un número natural es aquel que divide a este número en forma exacta. Es un conjunto finito.

$$\mathbf{D18} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{9}, \mathbf{18}\}$$

C. NÚMERO PRIMO:

Son los números que tienen dos divisores la unidad y el mismo número.

NÚMEROS PRIMOS EN ROJO									
0	1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9
10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**
20	21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**
30	**31**	32	33	34	35	36	**37**	38	39
40	**41**	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49
50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**
60	**61**	62	63	64	65	66	**67**	68	69
70	**71**	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**
80	81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**
90	91	92	93	94	95	96	**97**	98	99

D. NÚMERO COMPUESTO

Es el número que tiene más de dos divisores. Ejemplos: 4, 6, 8, 9 y 10.

Números	**Divisores**
4	**1, 2, 4**
6	**1, 2, 3, 6**
8	**1, 2, 4, 8**
9	**1, 3, 9**
10	**1, 2, 5, 10**

E. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD:

Un número es divisible exactamente entre:

Número	Criterio
2	Si el número termina en cero o cifra par (el cero se considera par)
3	Si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3
4	Si el número formado por las dos últimas cifras es un múltiplo de 4 o cuando termina en doble cero.
5	Si la última cifra es 0 o 5.
6	Si el número es divisible por 2 y 3.
7	Si al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 2 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es múltiplo de 7.
8	Si el número formado por las tres últimas cifras es un múltiplo de 8.
9	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
10	Si la última cifra es 0.
11	Si sumando las cifras del número en posición impar por un lado y las de posición par por otro. Luego se resta el resultado de ambas sumas obtenidas. Si el resultado es 0 o un múltiplo de 11, el número es divisible por este.
12	Si el número es divisible por 3 y 4
13	Si al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 9 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 13.
17	Si al separar la última cifra de la derecha multiplicarla por 5 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 17.

F. FACTORIZACION EN PRIMOS (DESCOMPOSICION FACTORIAL)

Teorema fundamental de la aritmética.

Consiste en expresar un número compuesto como producto de factores primos.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	-

$60 = 2\times2\times3\times5$ $60 = 2^2\times3\times5$

G. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

El mcm de dos o más números es el producto de sus divisores primos comunes y no comunes.

27	**45**	3
9	15	3
3	5	3
1	5	5
1	1	-

MCM (27, 45) = **3×3×3×5** = **135**
MCM (27, 45) = **3^3×5 = 135**

H. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD):

El MCD de dos o más números es el producto de sus divisores primos comunes.
Calcula, el MCD de los siguientes números:

60	**150**	**360**	2
30	75	180	3
10	25	60	5
2	5	12	-

MCM (60, 150, 360) = **2×3×5** =**30**

I. PRIMOS RELATIVOS:

Números primos entre sí (P.E.S.I.)

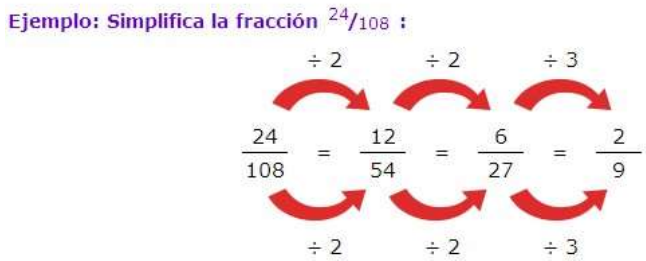
Se les denomina también primos relativos o coprimos, y son aquellos números que tienen como único divisor común a la unidad.

Ejemplo: 6, 14, 21 son números P.E.S.I.

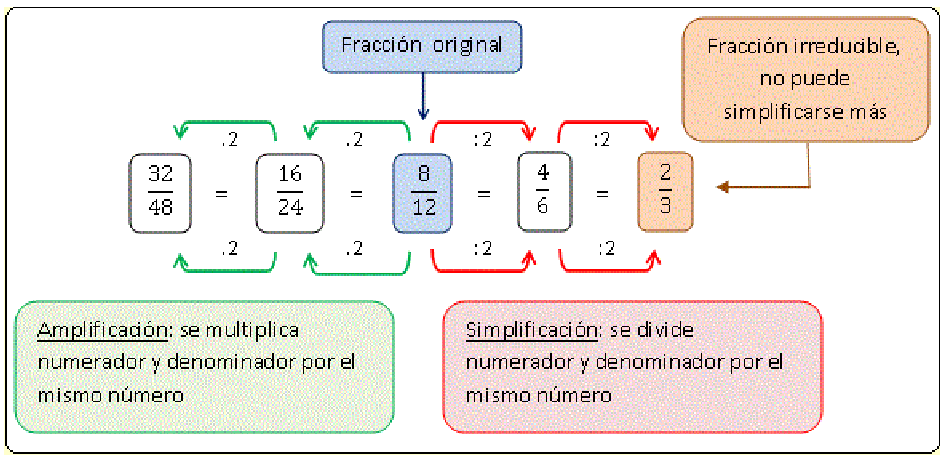
Divisores:
6_____ {**1**, 2, 3, 6}
14____ {**1**, 2, 7, 14}
21____ {**1**, 3, 7, 21}

…Porque el único divisor común es 1.

2.3.7. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES



$$\frac{12}{36}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 3}=\frac{1}{3}$$



Fuente: recuperado de https://fatimatematica.wordpress.com/fracciones/fraccion-equivalente-fraccion-irreducible/

2.3.8. OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Como regla general, en cálculos aritméticos con números racionales, primero se deben de simplificar las fracciones si es posible y, después de operar vuelva a simplificar si es posible (S.O.S)

A. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR

Se suman o se restan los valores correspondientes a los numeradores y se deja el mismo denominador.

A. $\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{+3+7}{8}=\frac{10}{8}$

B. $\frac{9}{11}-\frac{5}{11}=\frac{+9-5}{11}=\frac{4}{11}$

C. $-\frac{6}{5}+\frac{13}{5}=\frac{-6+13}{5}=\frac{7}{5}$

D. $-\frac{1}{7}-\frac{6}{7}+\frac{11}{7}=\frac{-1-6+11}{7}=\frac{4}{7}$

B. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES CON DIFERENTE DENOMINADOR

a. Primera forma

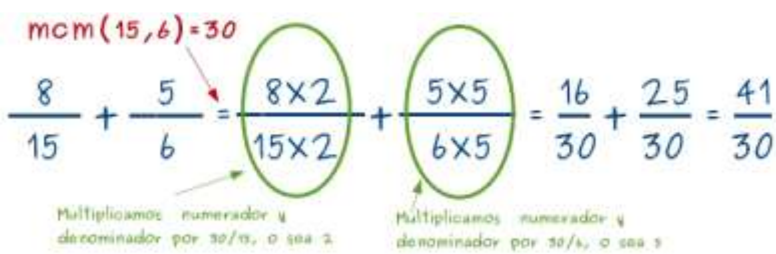
Ejemplo :

$\frac{7}{12}+\frac{3}{9}-\frac{4}{24}$	**Primero simplificamos numerador con denominador de la misma fraccion** y luego seguimos operando. La segunda fraccion dividimos el numerador y denominador dentro de 3 y la tercera fraccion dividimos numerador y denominador dentro de 4.
$\frac{7}{12}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$	Encontramos el mcm de los denominadores de las tres fracciones que es 12 y operamos
$\frac{1 \times 7 + 4 \times 1 - 2 \times 1}{12}$	Dividimos el mcm dentro de cada uno de los denominadores de cada una de las fracciones y los multiplicamos por el numerador de cada una de las fracciones colocando antes el signo que separa a cada una de las fracciones y finalmente operamos
$\frac{7 + 4 - 2}{12}$	
$\frac{9}{12}$	Simplificamos dividiendo numerador y denominador dentro de 3
$\frac{3}{4}$	Obteniendo finalmente la fraccion irreducible (fraccion que ya no es posible simplificar mas)

b. Por fracciones homogéneas

Se expresan las fracciones con igual denominador (Se transforman en fracciones homogéneas). Posteriormente se operan como fracciones con igual denominador (sumando los numeradores y copiando el denominador).

a.



b. $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$

C. INVERSO ADITIVO

Todo número racional sumado son su opuesto da como resultado cero.

Para todo a/b є Q existe (- a/b) є Q tal que a/b + (-a/b) = 0

Ej.: El inverso aditivo de 4/5 es -4/5 porque 4/5 + (- 4/5) = 0

D. MULTIPLICACIÓN DE RACIONALES EN FORMA DE FRACCIÓN:

Primero se simplifica y luego se multiplican los numeradores entre si y los denominadores entre sí. Finalmente se vuelve a simplificar si es necesario.

Ejemplo:

$\frac{4}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{3}{6}$	Se divide dentro de 4 el numerador de la primera fracción (4) y el denominador de la segunda fracción (8). Se divide el numerador (3) y el denominador (6) dentro de 3. **Recuerde que se puede simplificar numerador con denominador de la misma fracción o de distinta fracción**
$\frac{1}{9} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{2}$	En la segunda fracción 2/2 es igual a uno
$\frac{1}{9} \times 1 \times \frac{1}{2}$	Se multiplica finalmente solo numeradores con numeradores y denominadores con denominadores
$\frac{1}{18}$	Respuesta final. Nota: Es mejor simplificar primero y luego realizar las multiplicaciones y no al contrario.

E. INVERSO MULTIPLICATIVO

También llamado recíproco.
Todo número racional multiplicado con su reciproco da como resultado 1.

Para todo a/b є Q existe (b/a) є Q tal que a/b x (b/a) = 1

Ejemplos:

$\frac{2}{3}$ es inverso multiplicativo de $\frac{3}{2}$ ya que $\frac{2}{3} * \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$
$\frac{1}{5}$ es inverso multiplicativo de 5 ya que $\frac{1}{5} * 5 = \frac{5}{5} = 1$
8 es inverso multiplicativo de $\frac{1}{8}$ ya que $8 * \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

F. DIVISIÓN DE RACIONALES EN FORMA DE FRACCIÓN

Para dividir dos números racionales se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Donde $\frac{a}{b}$ es el dividendo y $\frac{c}{d}$ el divisor.

Ejemplo

$\frac{21}{30} \div \frac{7}{6}$	Utilizando la propiedad del inverso multiplicativo cambiamos el símbolo de la división entre dos fracciones por el de la multiplicación y en la segunda fracción cambiamos el numerador al denominador y el denominador al numerador (Comúnmente se dice que le damos vuelta)
$\frac{21}{30} \times \frac{6}{7}$	**Procedemos a simplificar numerador con denominador de la misma fracción o de distinta fracción**. En este caso se divide dentro de 7 el numerador de la primera fracción (21) y el denominador de la segunda fracción (7). Además dividimos dentro de 6 el denominador de la primera fracción (30) y el numerador de la segunda fracción (6).
$\frac{3}{5} \times \frac{1}{1}$	Finalmente multiplicamos numerador con numerador y denominador con denominador .
$\frac{3}{5}$	

G. FRACCIONES COMPLEJAS

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{3}{2} \div \frac{5}{7} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{21}{10}$$

Ejemplo

$$\frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 3}$$

Primero simbolizamos cada parte de la fracción con letras A / B y operamos por separado

A: $\frac{5}{2} - \frac{1}{3}$

Simplificamos las fracciones de ser necesario y encontramos el mcm que es 6 y operamos

$$\frac{3x5 - 2 \times 1}{6} = \frac{15 - 2}{6} = \frac{13}{6}$$

B: $\frac{1}{3} + 3$

Simplificamos si fuera posible y operamos mcm 3

$$\frac{1 \times 1 + 3 \times 3}{3} = \frac{1 + 9}{3} = \frac{10}{3}$$

Luego unimos las partes: A/B

$$\frac{\frac{13}{6}}{\frac{10}{3}}.$$

Aplicamos la propiedad del producto de extremos y producto de medios

$$\frac{13 \times 3}{6 \times 10}$$

Extremos / Medios

Simplificamos dividiendo el extremo (numerador) 3 y el medio (denominador) 6 dentro de 3.

$$\frac{13 \times 1}{2 \times 10}$$

Finalmente multiplicamos en línea recta horizontal

$$\frac{13}{20}$$

H. POLINOMIOS ARITMÉTICOS

Como regla general, en cálculos aritméticos con números racionales, primero se deben de simplificar las fracciones si es posible y, después de operar vuelva a simplificar si es posible (S.O.S.)

Se debe de tener en cuenta la jerarquía operativa.

Nivel 1: Se simplifican y se verifican las operaciones contenidas en símbolos de agrupación más internos; luego los más externos. Generalmente en este orden de símbolos.

a. ( ) b. [ ] c. { }

Nivel 2: Funciones

Nivel 3: Potencias y radicales

Nivel 4: Multiplicación y división

Nivel 5: Suma y resta

En ausencia de símbolos de agrupación, por ejemplo, la multiplicación, debe de realizarse antes que la adición o la sustracción. Para operaciones que están en el mismo nivel jerárquico se procede de izquierda a derecha (Esto significa que tendrá prioridad aquella operación que en su momento aparezca más a la izquierda).

Ejemplo

a)

$$\mathbf{\frac{15}{8} : \left[\frac{10}{4} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right)\right]}$$

Primero se operan paréntesis y signos de agrupación.

Se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{15}{8} : \left[\frac{-50}{12}\right]$$

La fracción resultante se simplifica.

$$\frac{15}{8} : \left[\frac{-25}{6}\right]$$

Se procede a hacer la división, la cual se puede convertir

En multiplicación por el inverso multiplicativo.

$$\frac{15}{8} \cdot \left[\frac{6}{-25}\right]$$

$$\frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{-5 \cdot 5}$$

Se pueden factorizar los números para facilitar la simplificación.

$$\frac{\cancel{5} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{-5 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2}$$

Se simplifican los términos.

$$\frac{3 \cdot 3}{-5 \cdot 2 \cdot 2}$$

Se realiza la multiplicación.

$$\mathbf{-\frac{9}{20}}$$

Resultado.

b)

$2:\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)-3\left(1+\frac{1}{2}\right)$	Se operan paréntesis y signos de agrupación. Se realizan las sumas tomando en cuenta el denominador común.
$2:\left(\frac{1+3}{6}\right)-3\left(\frac{2+1}{2}\right)$	
$2:\left(\frac{4}{6}\right)-3\left(\frac{3}{2}\right)$	Se simplifican las fracciones resultantes y se opera la multiplicación.
$2:\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{9}{2}$	Se realiza la división, la cual se puede realizar multiplicando Con el inverso aditivo.
$2\cdot\frac{3}{2}-\frac{9}{2}$	Se opera primero la multiplicación.
$3-\frac{9}{2}$	Se realiza la resta tomando en cuenta el denominador común
$\frac{6-9}{2}$	Se opera la resta.
$\mathbf{\frac{-3}{2}}$	**Resultado**

2.3.9. APLICACIONES DE FRACCIONES, MCD Y MCM

Ejemplos

MCM

1. Tres paisanos del interior de la republica de se van a trabajar fuera de su pueblo en la misma fecha a el departamento de Guatemala. Desde la fecha en la cual partieron juntos, el primero regresa a su pueblo a visitar a su familia cada 15 días, el segundo cada 30 días y el tercero cada 45 días. ¿**A los cuantos días coincidirán por primera vez en su pueblo los tres paisanos?**

15 – 30 – 45	**5**
3 - 6 - 9	**3**
1 - 2 - 3	**2**
1 - 3	**3**
1	

mcm = 5 x 3 x 2 x 3 = 90 días

MCD

2. En el laboratorio de química hay tres recipientes que contienen una solución. La capacidad de los recipientes es de 6,300 mililitros (ml), 5,400 ml y 4,200 ml. La solución se repartirá en probetas igual capacidad y se desea que esta sea la máxima posible. Determine:

a). ¿Qué capacidad debe de tener cada probeta?
b). ¿Cuántas probetas son necesarias?

a).

6,300 – 5,400 – 4,200	**100**
63 - 54 - 42	**3**
21 - 18 - 14	

Mcd = 100 x 3 = 300

b). 21+18+14 = **53 probetas de 300 ml cada una**.

FRACCIONES:

1. **Si una persona gasta las 3/5 partes de su sueldo mensual, cuando han transcurrido las 2/3 partes del mes. Considerando que mantiene el mismo patrón de gasto. ¿Con que fracción del sueldo se quedara al final del mes que tiene 30 días? Si la persona recibe un sueldo neto de Q.10,000.00 cada mes, ¿cuánto dinero le quedará al final del mes?**

Dinero gastado: 3/5 x 10,000 = Q.6,000.00

Tiempo trascurrido: 2/3 x 30 = 20 días

Razón de gasto por día = 6,000/20 días = Q.300.00 por día

Dinero que no se ha utilizado = Q.4,000.00

Días que faltan para terminar el mes = 10 días

Dinero gastado en los 10 días que faltan para terminar el mes:
10 días * Q.300.00 = Q.3,000

Gasto total en el mes = Q.9,000.00

Fracción de sueldo que queda al final del mes= 1,000/10,000 = 1/10

2. **El propietario de un terreno ha decidido venderlo en parcelas. Vendió primero 3/7 del mismo, después la mitad de lo restante y aún le quedaron 244 m^2 sin vender. ¿Cuál era la superficie del terreno?**

Fracción del terreno que queda del total del terreno: 7/7 – 3/7 = 4/7

Segunda fracción vendida:

Primer forma:
1/2 x 4/7 = 2/7

Segunda:
4/7÷ 2 = 2/7 resto del terreno

Fracción del terreno que se ha vendido = 3/7 + 2/7 = 5/7

Fracción que queda sin vender = 7/7 – 5/7 = 2/7 que equivale a 244m^2

Por lo que 1/7 = 122m^2

Área total del terreno= 122m^2 x 7 = **854m^2**

HOJA DE TRABAJO

A. Encuentre el valor de las siguientes expresiones:

1) $-20 \div 4 - 6(-5)$
2) $20(-4) \div 10 - 6 \div (5-7)$
3) $3 + 2(-2-3) - 7(1-5)$
4) $2(-2-6) - 7 + 4(8-1)$
5) $520 + [8 - 3 + \{9 - (4 + 2 - 1)\}]$
6) $2\{9 - 2[(3+1) - (1+1)]\}$
7) $12 \div 4 \times 3 - 8 \div 4 \times 2$
8) $(26+2) \div (-4) - 10(8-12)$
9) $18 \div 3 \times 6 - (7-35) \div 14$
10) $7 - 3(45 - 5 \times 3^2)^2$
11) $4 \times 3 - 2^2 \times 4 + 7 - 3$
12) $[12 + 4(9 - 2 \times 3)^3] \div 10 - 3$
13) $[-3\{2 - (7-5) \div 6\}]^2$
14) $9 + 5 \times 8 - 7 \times 5 - 20$
15) $3 \times 5 - 2 \times 7 + 6 \times 3$
20) $8 \div 2 \times 4 - 6 \div 3 \times 3$
21) $-6(9)(-5) - 10(-7)(-6)$
22) $8 + 2(-4) - 6(7-8)$
23) $(-3) - 2\{5 - 3[2 - 2(3-6)]\}$
24) $72 \div (-18) \times 4 - (3-12) \div (-9)$
25) $8 \times 6 \div 3 - 5(3-7)$
26) $(5-21) \div (-8) + 3(9-1)$
27) $-\{-[3 + (3-8) - (-15+7) - 4]\}$
28) $[3(9 \times 4 + 3) - 3(4-8)] \div 7 \times 7 - (9 + 13 - 18)$
29) $3^2 + 5 - 3[(8 \div 6 \times 4) - 3] + 5^3 - 4^2 \times 7$
30) $(12 \div 6)^2 - 4 \div 2(6 \div 2) + 3^2 + 22 \div 11$
31) $[4^2 - 5(2 \times 3 - 2^2)^3 + 3] \div 3 - 20$
32) $15 - 2[21 - 6(3 \times 5 - 7)]$
33) $\dfrac{\left(9-4^2\right)^2}{7} + \dfrac{21(19-4)}{35}$

19) $(5-21) \div (-8) + 3(9-1)$

16) $[60 \div 4 + (-8 + 3 \times 2)^2(5 + 3 - 25)^3] - 91\{3(14 \div 7 - 3)[3 - 2(8-10)^5] - 14\}$

17) $-\{10 - 3 \times 4[17 + 3(5-13)] - [-32 + 4(-9-2-11)(-15+11)] \div 5\}$

18) $-\{-[3 + (3-8) - (-15+7) - 4]\} + 6^4 \div 6^2 - 20 \div 6 \times 7 - (7-35) \div 12$

34) $-80 \div \{[-3 - 4(9-5)^2 - 3(-7-10)] \div 4 - 36 \div 3^2 + 3[5 - (7-10)]\}$

35) $\{15 - 7[4 - 2(-18-6)] - [18 \times 20 - 7(-2 \times 9 - 11)]\} \div \{15 - 2[14 - 6(5-50) + 8(-5-3)] - 31\}$

36) $\{15 + (9-5)2\}\{(6 \times 4) \times 3 + (5-4)(4-3)\}$

37) $8 + [9 - \{6 - (5-4)\}] + 14 - [11 - \{7 - (3-2)\}]$

38) $[(+2) + (-7)][(+8) - (+10)] - 16 \times 3 \div [(-3) - (+9)][(+4) + (-2)]$

39) $18 \div 6 \times [-2(-18-6)] - \{(6 \div 3 \times 2 + 5)[-7(-2 \times 9 - 46)]\} \div (-2) \times 15 \div \{[-6(5-15)](-5-3)\}$

B. Reducir a su mínima expresión las siguientes fracciones, utilizando la definición del MCD.

40) $\dfrac{98}{147}$ 42) $\dfrac{332}{415}$ 44) $\dfrac{623}{979}$ 46) $\dfrac{4359}{11624}$ 48) $\dfrac{1212}{1515}$

41) $\dfrac{1727}{1884}$ 43) $\dfrac{90}{195}$ 45) $\dfrac{225}{360}$ 47) $\dfrac{144}{176}$ 49) $\dfrac{126}{72}$

C. Obtenga los valores de las expresiones siguientes:

50) $\dfrac{9 \times 8}{18 \times 6}$ 51) $\dfrac{15-18}{-9}$ 52) $\dfrac{3 \times 2 \times 5}{6 \times 4 \times 10}$ 53) $\dfrac{-25-36}{5-9}$ 54) $\dfrac{20+7}{-6}$

55) $\frac{7-21}{-7}$ 56) $\frac{8}{4-16}$ 57) $\frac{24-9}{12+3}$ 58) $\frac{18-20}{3+5}$ 59) $\frac{5\times20\times18}{3\times6\times10}$

D. **Obtenga la fracción equivalente de cada uno de los números decimales siguientes:**

60) $0.\overline{6}$ 63) 0.04 66) 3.24 69) $7.\overline{325}$ 72) 0.15

61) $-0.3\overline{25}$ 64) 13.45 67) 1.144 70) -9.16 73) $2.\overline{884}$

62) $0.\overline{39}$ 65) $-7.\overline{7}$ 68) $0.9\overline{58}$ 71) $1.1\overline{6}$ 74) $-5.42\overline{3}$

E. Escriba las siguientes fracciones en forma decimal, indicando el tipo de cifra decimal que poseen.

75) $\frac{3}{2}$ 79) $\frac{23}{15}$ 77) $\frac{7}{9}$ 81) $\frac{7}{8}$ 83) $\frac{9}{16}$

76) $\frac{71}{12}$ 80) $\frac{17}{25}$ 78) $\frac{58}{111}$ 82) $\frac{37}{300}$ 84) $\frac{49}{11}$

F. Escriba las fracciones impropias siguientes como números mixtos.

85) $\frac{3}{2}$ 87) $\frac{98}{3}$ 89) $\frac{328}{15}$ 91) $\frac{825}{23}$ 93) $\frac{743}{29}$

86) $\frac{136}{11}$ 88) $\frac{973}{33}$ 90) $\frac{145}{6}$ 92) $\frac{29}{8}$ 94) $\frac{201}{16}$

G. Convierta los números mixtos siguientes a fracciones:

95) $2\frac{3}{5}$ 97) $2\frac{6}{7}$ 99) $3\frac{8}{9}$ 101) $31\frac{5}{6}$ 103) $3\frac{9}{13}$

96) $25\frac{3}{7}$ 98) $-21\frac{3}{13}$ 100) $16\frac{13}{15}$ 102) $18\frac{9}{17}$ 104) $-6\frac{11}{14}$

H. Opere y simplifique:

105) $\frac{6}{11} \div \left(\frac{5}{12} - \frac{23}{30}\right)$

106) $\frac{7}{15} - \frac{11}{24} - \frac{13}{36}$

107) $\frac{3}{2} - \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{6}$

108) $\frac{5}{36} - \frac{4}{-63} + 3 - \frac{8}{-3}$

109) $\frac{1}{3} + \frac{2}{4}\left(\frac{7}{4} - \frac{1}{5} + \frac{21}{63}\right)$

110) $\frac{11}{15} + \frac{8}{13}\left(\frac{3}{16} - \frac{11}{24}\right)$

111) $\frac{9}{10} + \frac{15}{-28} - \frac{7}{8} - \frac{11}{-12}$

112) $\left(4 - \frac{1}{4}\right) \times \left(5 - \frac{1}{5}\right) \div \frac{1}{18}$

113) $\frac{7}{12} + \left(-\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)$

114) $\frac{5}{8} - \frac{9}{8} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{12}\right)$

115) $\left(7 + 3\frac{1}{8}\right) \div \left(14 + 6\frac{1}{4}\right)$

116) $\frac{53}{25} + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) \div 2\frac{1}{3}$

117) $-\frac{7}{24} - \frac{13}{24} - \frac{19}{24}$

118) $-\frac{7}{4} \div \frac{14}{8}(-3)$

119) $\frac{7}{8}+1\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}$

120) $\frac{13}{19}-\frac{5}{27}\div\frac{22}{15}$

121) $\frac{1}{4}+\frac{5}{16}\times\frac{8}{3}-\frac{3}{8}$

122) $\frac{5}{12}-\frac{11}{36}\div\frac{22}{15}$

123) $\frac{3}{10}\div\left\{\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{4}-\frac{8}{3}\right)\right\}-\frac{11}{5}$

124) $\frac{7}{3}+\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{2}+\left\{\frac{9}{10}-\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-1\right)\right\}\right]$

I. Resuelva las siguientes fracciones complejas

125) $$\frac{\dfrac{\frac{2}{3}\left(3-\frac{3}{5}\right)}{3\frac{1}{5}}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{10}\right)}$$

126) $$\frac{\frac{4}{7}-\frac{3}{9}}{\frac{3}{27}-\frac{5}{6}\times\frac{2}{9}-1}+1$$

127) $$1+\frac{3-\frac{1}{5}}{1+\dfrac{\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{1+\dfrac{1}{\frac{3}{4}}}}$$

128) $$\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\left(\frac{7}{14}-\frac{1}{5}+\frac{21}{63}\right)}{1-\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{7}}{3\frac{2}{7}}}$$

129) $$\frac{17}{5}-\frac{3+\frac{3}{2}}{1+\dfrac{3-\frac{1}{3}}{2+\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}}}$$

130) $$\frac{1-\dfrac{\frac{1}{2}+3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)}{3\frac{1}{2}}}{2+\dfrac{3}{\frac{2}{3}}}$$

131) $$\frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{5}+\frac{7}{2}}{\dfrac{1+\frac{5}{3}}{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}}}$$

132) $$1-\frac{1+\dfrac{{}^{3}/_{2}+{}^{1}/_{3}}{1-{}^{1}/_{2}}}{\dfrac{1+{}^{1}/_{2}+{}^{1}/_{3}}{1+{}^{1}/_{2}}}$$

133) $$\frac{\dfrac{\frac{12}{5}}{2}+\frac{6}{5}\left(-\frac{3}{2}\right)}{\dfrac{5+\frac{1}{7}}{-1+\dfrac{7}{\frac{28}{9}}-\frac{15}{3}}}$$

134) $$\frac{1-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{5}\right)}{1+\dfrac{1-\frac{1}{2}+3}{1-\dfrac{1-\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}}}}$$

135) $\dfrac{\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}}{\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{5}} - \dfrac{1-\dfrac{5}{3}}{\dfrac{3}{7}+\dfrac{9}{6}}$

136) $1 - \dfrac{1+\dfrac{1}{\frac{3}{2}-1}}{2-\dfrac{1}{\frac{3}{2}+1}}$

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS PARES

Ejercicios A

2) -5
4) 5
6) 10
8) 33
10) 7
12) 9
14) - 6
16) - 72
18) 17
20) 10
22) 6
24) -17
26) 26
28) 125
30) 9
32) 69
34) -5
36) 1679
38) 18

Ejercicios B

40) 2/3
42) 4/5
44) 7/11
46) 3/8
48) 4/5

Ejercicios C

50) 2/3
52) 1/8
54) - 9/2
56) - 2/3
58) - ¼

Ejercicios D

60) 2/3
62) 13/33
64) 269/20
66) 81/25
68) 949/990
70) - 229/25
72) 3/20
74) - 1627/300

Ejercicios E

76) $5.91\overline{6}$; Periódica mixta.
78) $0.5\overline{225}$; Periódica mixta.
80) 0.68 ; Finita.
82) $0.12\overline{3}$; Periódica mixta.
84) $4.\overline{45}$; Periódica pura.

Ejercicios F

86) $12\,\frac{4}{11}$
88) $29\,\frac{16}{33}$
90) $24\,\frac{1}{6}$
92) $3\,\frac{5}{8}$
94) $12\,\frac{9}{16}$

Ejercicios G

96) $\frac{178}{7}$
98) $-\frac{276}{13}$
100) $\frac{253}{15}$
102) $\frac{315}{17}$
104) $-\frac{95}{14}$

Ejercicios H

106) $-\frac{127}{360}$
108) $\frac{493}{84}$
110) $^{17}/_{30}$
112) 324
114) $^{1}/_{4}$
116) 2
118) 3
120) $\frac{2099}{3762}$
122) $\frac{5}{24}$
124) $\frac{13}{5}$

Ejercicios I

126) $\frac{158}{203}$
128) $\frac{299}{388}$
130) $\frac{2}{91}$
132) $-\frac{31}{11}$
134) $\frac{1}{15}$
136) $-\frac{7}{8}$

J. Problemas generales:

137) Una granja avícola posee 525 aves, entre las cuales hay gallinas ponedoras, pollos de engorde y patos. Si los 5/7 del total son gallinas ponedoras y 2/5 del resto son pollos de engorde, determine el número de gallinas, pollos y patos en la granja.

138) En una institución educativa la cuota mensual por colegiatura es de Q2590.00, determine:
¿Cuánto deberá pagar un estudiante si le conceden 3/7 partes de beca mensualmente?
¿De cuánto será el ahorro de dicho estudiante al primer año de estudios?

139) Se desea dividir en secciones del mismo tamaño, de la mayor longitud posible y sin desperdiciar nada, 48 tubos de polietileno de 80 centímetros y 36 tubos de la misma clase, que miden 60 centímetros. ¿Cuál será la longitud que deberán medir las secciones y cuántos segmentos se obtendrán en total?

140) La temperatura de la ciudad de Guatemala llega a 13°C a las 2:00 p.m. Si comienza a disminuir a un promedio de 7/3 grados por hora, calcular la lectura en el termómetro a las 11:00 p.m.

141) Si un queso pesa ½ de libra, entonces ¿Cuál es el peso de un queso y medio?

142) Una mezcla de 100 litros contiene 4/5 partes de agua y el resto de un insecticida comercial que contiene ¾ partes de ingrediente activo. Determine:
¿Cuántos litros hay del producto comercial en la mezcla?
¿Cuántos litros hay de ingrediente activo en la mezcla?

143) Una finca posee 260 manzanas de terreno, de las cuales 2/5 partes están cultivadas con frutales y 3/10 partes con cultivos de granos básicos. Del área restante, ½ es usada para producción de hortalizas, 1/3 tiene bosques y el resto está ocupada por la infraestructura (instalaciones y oficinas). ¿Cuántas manzanas se ocupan entonces para frutales, granos, hortalizas, bosques e infraestructura?

144) Una empresa exportadora de naranjas desea empacar en cajas, con fines de transporte y envío, 560, 200 y 400 naranjas pequeñas, medianas y grandes respectivamente. Si desea introducir el mismo número de naranjas en todas las cajas y en la mayor cantidad posible; determine cuántas cajas de naranja pequeña, mediana y grande se transportarán al lugar de destino.

145) Tres rollos de alambre espigado miden 2172, 3136 y 1892 metros de longitud y se desea dividirlos en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. Encontrar la longitud de los pedazos y cuantos se obtendrán de cada rollo.

146) La empresa “EXCRUTASA” obtuvo ingresos el año anterior por Q250,000.00 por venta de café, maíz y frijol. De los ingresos totales, 3/5 partes se lograron por venta de café, y del resto de ingresos 7/10 partes correspondieron a venta de maíz. Si se vendieron 75 quintales de frijol, determine:
¿Cuál fue el ingreso percibido, en quetzales, por venta de café, frijol y maíz?
¿Cuál fue el precio de venta por quintal de frijol?

147) En un velódromo parten simultáneamente tres ciclistas de un mismo punto de largada. Uno de los ciclistas da una vuelta cada 30 segundos, otro cada 27 segundos y el tercero cada 24 segundos. ¿A los cuántos segundos cruzan los tres ciclistas juntos, por primera vez por el punto de largada? ¿Cuántas vueltas ha dado el tercer ciclista en ese momento?

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS PARES

138) 375 gallinas
60 pollos
90 patos
140) - 8 °C
142) 15 litros
144) 14, 5 y 10 cajas
146) Q 150,000.00 por café.
Q 70,000.00 por maíz.
Q 30,000.00 por frijol.
Q 400.00 / qq de frijol.

EVALUACIONES

1. Evaluación 1

1) Indique qué enunciado(s) son falsos:

P) Todo número racional es entero. Q) Todo número entero es racional.

R) $\sqrt{2}$ es un número irracional. S) Todos los números decimales son irracionales

$\boxed{\text{a). P y S}}$ b) Q y R c) S d) Todas son falsas

2) Indique qué enunciado(s) son verdaderos:

P) π es un número racional Q) 3.7 es un número irracional

R) 44/11 es un número entero S) $\sqrt{5}$ es un número real

a) R b) P y Q c) Q y R $\boxed{\text{d) R y S}}$

3) Indique qué número(s) decimal(es) es (son) racional(es):

P). $0.3\overline{42}$ Q). 0.54 R). $1.\overline{13}$ S). 1.412570169

$\boxed{\text{a) P, Q y R}}$ b) P y Q c) P d) S

4) En jerarquía matemática para operaciones que tienen el mismo nivel jerárquico procedemos a operar de:

P) De derecha a izquierda Q). De arriba para abajo

R) De izquierda a derecha S). De abajo para arriba

a) S b) P $\boxed{\text{c) R}}$ d) Q

5) El resultado correcto de la operación: 14 ÷ [7 (18 - 20)]

a) 1 $\boxed{\text{b) -1}}$ c) 4 d) -4

6) El área de un círculo ($A = \pi r^2$) es un número:

a) Racional b) Entero $\boxed{\text{c) Irracional}}$ d) Natural

7) El resultado correcto de la operación: -2 + 3 [6 – 2 (3 -12)] es:

a) 110 b) 38 c) -38 $\boxed{\text{d) Ninguna es correcta}}$

8) El resultado correcto de la operación: - 6 { 6 + 7 (5 – 2 x 4)+ 5} es:

a) -606 b) 11 $\boxed{\text{c) 60}}$ d) Ninguna es correcta

9) **De la operación: $5 - 2 [3 (7 - 4) - (- 12 + 3)] - 6$ se tiene como resultado:**

a) Un número natural
b) Un entero negativo
c) Un entero positivo
d) a y c es correcta

10) **El número que representa la expresión: $12 - \{-2 + 3 [4 - (12 - 8) + 1] - 2\} + 3$ es:**

a) – 8
b) 4
c) -4
d) 16

11) **Sistema de numeración que utilizó el cero**

a) Babilónico
b) Egipcio
c) Binario
d) Ninguna de las anteriores

12) **En la adición, la siguiente expresión: $a + b = b + a$ representa la propiedad:**

a) Clausurativa
b) Asociativa
c) Conmutativa
d) Ninguna es correcta

13) **En operaciones como: $3 (4 + 5)$, se puede realizar haciendo primero la suma entre paréntesis, obteniendo $3 (12)$. ¿Cuál de las propiedades de los números enteros se ha tomado como base al optar por dicho procedimiento?**

a) Clausurativa
b) Conmutativa
c) Distributiva
d) Ninguna de las anteriores

14) **Dentro del conjunto de operaciones contenidas en la expresión $[- 3 \{ 2 - (17 - 5) \div 3 \}]^7$, hay una de ellas que debe realizarse primero al iniciar los cálculos debido a que :**

a) La resta tiene prioridad sobre cualquiera de las otras operaciones contenidas en la expresión
b) La potencia tiene prioridad sobre cualquier otra operación contenida en dicha expresión
c) Debe realizarse primero la operación contenida dentro del corchete
d) Deben realizarse primero las operaciones contenidas dentro de los símbolos de agrupación desde los más internos hacia los más externos.

15) **En cuáles de las siguientes propiedades de los números reales se sustenta lo siguiente $(3 + 4) + (5 + 6) + 7$ es igual a $(6 + 5) + (4 + 7) + 3$:**

a) Distributiva y asociativa
b) Asociativa y conmutativa
c) Conmutativa y distributiva
d) El orden de los factores no altera el producto y propiedad del inverso aditivo

16) El resultado de la operación [-2 { - 4 – 3 } – 14] ÷ { 7 – 7 x 9 } , es :

a) 56 | b) Cero | c) -56 | d) Ninguna es correcta

17) El resultado de la siguiente operación [3 (9 x 4 + 3) – 3 (4 – 8)] ÷ 7 x 7 - (9 + 13 – 18), es :

a) 857 ÷ 7 | b) – 125 | c) -857÷ 7 | d) 125

18) Es el número que tiene la misma cantidad o magnitud pero su signo es diferente.

a) Valor absoluto | b) Número opuesto | c) Inverso aditivo
d) Ninguna de las anteriores

19) El resultado de la siguiente operación con números enteros:
(2 - 7) (8 - 10) – 16 x 3 ÷ [(-3-9) (4 - 2)]

a) 12 | b) 260 | c) – 30 | d) 18

20) Qué relación de orden existe entre los dos siguientes números: - 10 con respecto a -3.

a) –10 es mayor que -3 | b) –10 es menor que – 3 | c) –10 es igual a – 3
d) Ninguna de las anteriores es correcta

2. Evaluación 2

SERIE I: (10 puntos; 5 c/u, 5 minutos)

Exprese cada fracción como un numero mixto o bien cada número mixto como una fracción.

a. $\frac{19}{11}$ — **Respuesta:** 1 8/11

b. 7 6/10 — **Respuesta:** 38/5

SERIE II: (15 puntos; 5 c/u , 10 minutos)

Determinar la fracción irreducible correspondiente a cada decimal

a). $2.\overline{136}$ — **Respuesta:** 2134/999

b). 0.75 — **Respuesta:** 3/4

c). $1.\overline{126}$ — **Respuesta:** 125/111

SERI III: (15 puntos; 5 c/u , 10 minutos)
Exprese como un número decimal cada fracción, además indique que tipo decimal es.

a. $\frac{25}{20}$ — **Respuesta:** 1.25 Decimal exacto.

b. $\frac{293}{495}$ — **Respuesta:** $0.5\overline{91}$ Decimal periódico mixto.

c. $\frac{24}{9}$ — **Respuesta:** $2.\overline{6}$ Decimal periódico puro.

SERIE IV: (30 puntos; 15 c/u, 10 minutos)
Calcule el MCM y el MCD de los siguientes números

a. 36, 60 y 48 — **Respuesta:** MCM: 720 MCD: 12

b. 10, 11 y 20 — **Respuesta:** MCM: 2,200 MCD: No existe.

SERIE V: (30 puntos ; 15 c/u , 25 minutos)
Opere y simplifique

a. $-\ \{\ 2/3\ +\ [\ 1/5\ -\ (\ 1/4\ +\ 2/5\ )\ -\ 5/4\ ]\ +\ 1\ \}$ — **Respuesta:** 1/30

b. $(\ 4 - 1/4\ )\ (\ 5 - 1/5\ ) \div\ 2/5\ \times\ 4/25$ — **Respuesta:** 36/5

3. Evaluación 3

1) El resultado correcto de la operación: **(-4+5)÷(-1)+3-21÷(-7)÷3[-11x(-2)-19]** es:

a) -5 | $\boxed{\textbf{b) 5}}$ | **c) 0** | **d) Ninguna es correcta**

2) El inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$ es:

a) $\frac{3}{4}$ | $\boxed{\textbf{b) } \frac{4}{3}}$ | **c)** $\frac{-4}{3}$ | **d)** $\frac{3}{4}$

3) El resultado correcto de la operación:
- { 10 – 3 x 4 [17+ 3 (5 - 13)] – [- 32 + 4 (- 9 - 2 - 11) (-15 + 11)] ÷ 5 } es:

$\boxed{\textbf{a) - 30}}$ | **b) 30** | **c) 260** | **d) Ninguna es correcta**

4) Indique el resultado de operar y simplificar la operación:

$$\frac{7}{3}+\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{2}+\left\{\frac{9}{10}-\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-1\right)\right\}\right]$$

a) 5/13 | **b) 61/15** | $\boxed{\textbf{c) 13/5}}$ | **d) 34/15**

5) El resultado de la operación $\left\lfloor -12+2(8-2\times 3)^{3}\right\rfloor \div 10-3$ es:

a) 48/7 | **b) 9** | **c) -9** | $\boxed{\textbf{d) -13/15}}$

6) La fracción reducida equivalente al decimal **2.045** es:

a) 225/110 | $\boxed{\textbf{b) 45/22}}$ | **c) 25/11** | **d) Ninguna es correcta**

La siguiente fracción compleja le servirá para responder las preguntas 7, 8 y 9.

De la fracción compleja $$\frac{17}{5} - \frac{3 + \frac{3}{2}}{1 + \frac{3 - \frac{1}{3}}{2 + \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}}}$$

7) El resultado parcial de operar $1 + \frac{3 - \frac{1}{3}}{2 + \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}}$ es:

a) 3/7 **b) 7/3** **c) 4/3** **d) 5/3**

8) El resultado parcial de operar $\frac{3 + \frac{3}{2}}{1 + \frac{3 - \frac{1}{3}}{2 + \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}}}$ es:

a) -9/10 **b) 27/10** **c) -27/10** **d) -21/2**

9) El resultado de **toda la operación** es:

a) 7/10 **b) -16/35** **c) 61/10** **d) 70/10**

10) El decimal equivalente a la fracción **51/11** es:

a) $\mathbf{4.0\overline{6}3}$ **b)** $\mathbf{4.\overline{6}3}$ **c)** $\mathbf{4.\overline{63}}$ **d) Ninguna es correcta**

11) El resultado correcto de simplificar la operación:
$\{\mathbf{4} + [(\mathbf{5} - \mathbf{3}) \div \mathbf{4}]\} \div \{\{\mathbf{1} - \mathbf{3}[(\mathbf{4} + \mathbf{1}) \div \mathbf{2}] - \mathbf{3}\} \div \mathbf{5}\}$ es:

a) 9 **b) -60/19** **c) 45/19** **d) – 45/19**

12) En una empresa agroexportadora, reparten los pedidos hacia tres diferentes destinos cada 5, 6 y 8 minutos. ¿A cada cuántos minutos ocurre un envió simultaneo a los tres destinos?

a) 120 **b) 200** **c) 340** **d) Ninguna es correcta**

13) Un estudiante del curso propedéutico utiliza 3/8 del día para actividades de módulo y clases; 1/6 para recibir tutoría y alimentarse y 8 horas para dormir. El número de horas que le queda para practicar algún deporte u otra actividad es:

a) 2 **b) 4** **c) 3** **d) Ninguna es correcta**

14) Tres trozas (troncos) de 12, 18 y 24 metros de longitud respectivamente, deben cortarse en trozas iguales y de la mayor longitud posible para no desperdiciar madera. El número total de trozas que se obtienen al final es:

a) 6 **b) 4** **c) 8** **d) 9**

15) Una persona compra un cerdo de 250 libras en Q2,000.00 utilizando 2/5 partes del total del dinero que llevaba. El total de dinero que llevaba es:

a) Q10000.00 **b) Q15000.00** **c) 5000.00** **d) Ninguna es correcta**

La siguiente fracción compleja le servirá para responder las preguntas 16, 17 y 18.

De la fracción compleja $$2+\frac{\dfrac{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\times 3-1}{\dfrac{1+\frac{8}{3}-\frac{5}{2}}{1-\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}}+2}$$

16) El resultado parcial de operar $\dfrac{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\times 3-1$ es:

a) 2/3 **b) 10/9** **c) 15/6** **d) 53/6**

17) El resultado parcial de operar $\dfrac{1+\frac{8}{3}-\frac{5}{2}}{1-\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}}+2$ es:

a) 7/3 **b) 7/6** **c) 13/3** **d) 17/30**

18) El resultado de **toda la operación** es:

a) 24/13 **$\boxed{\text{b) 28/13}}$** **c) 24/5** **d) Ninguna es correcta**

19) Si un queso pesa 1/2 de libra, entonces ¿Cuál es el peso en libras de un queso y medio?

a) 3/12 **b) 3/2** **c) 1/2** **$\boxed{\text{d) 3/4}}$**

20) Determine el MCD de 15, 20 y 30:

$\boxed{\text{a) 5}}$ **b) 60** **c) 12** **d) Ninguna es correcta**

PARTE DOS

ÍNDICE

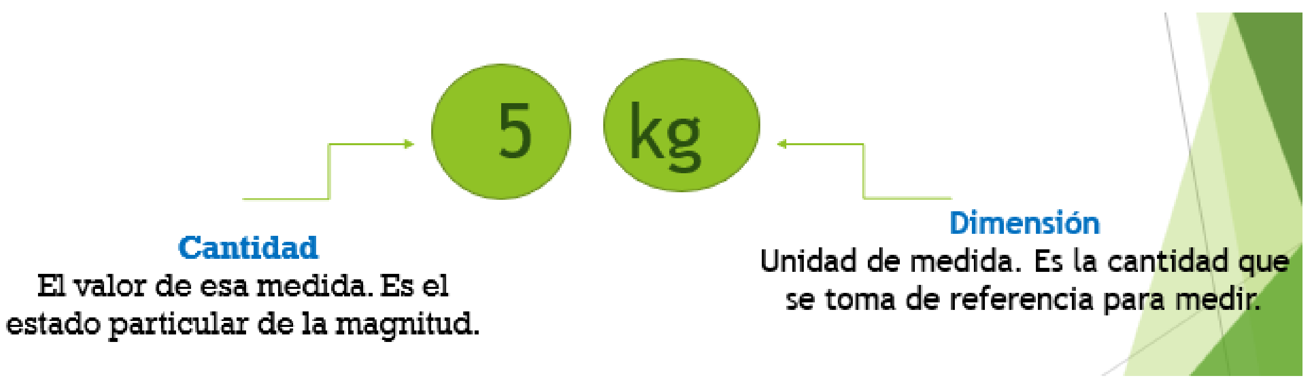
1. PROPORCIONALIDAD

1.1. Cantidad: Todo lo que es capaz de aumentar o disminuir

¿Qué se puede medir?

- Velocidad
- Dosis
- Área
- Densidad de siembra
- Peso especifico
- Longitud
- Número de trabajadores
- Tiempo

1.2. Magnitud: Es todo lo que se puede medir



Ejemplos de magnitudes:

- Estatura de una persona: 1.71 m
- Masa de un lechón: 5 kg
- Tiempo: 45 min
- Dosis: 50 cc/Bomba
- Densidad: 5 plantas/m^2
- Velocidad: 80 km/h
- Dosis: 200 kg nitrógeno / ha

1.3. Razón: Comparación entre dos magnitudes por medio de una división

Es el cociente de dos números a y b (con b ≠ 0). Estas magnitudes pueden ser de la misma o de diferente cantidad. Simbólicamente se representa por:

a : b o bien $\mathbf{\frac{a}{b}}$ y se lee **a es a b**

Ejemplos de razones

Caudal (Q)

$$\frac{Volumen}{Tiempo}\left(\frac{5\ \text{litros}}{minuto}\right)$$

Densidad animal (carga animal)

$$\frac{Número\ de\ animales}{Área}\left(\frac{14\ \text{pollos}}{m^2}\right)$$

Pendiente(m)

$$\frac{Cambio\ vertical}{Cambio\ horizontal}\left(\frac{2\ m}{3\ m}\right)$$

Rendimiento

$$\frac{Masa}{Área}\left(\frac{120\ \text{qq}}{ha}\right)$$

Conversión Alimenticia

$$\frac{Masa\ de\ alimento\ consumida}{Ganancia\ de\ masa\ diaria}\left(\frac{4\ kg}{2\ kg}\right)$$

Número de semillas por unidad de masa

$$\frac{Cantidad\ de\ semillas}{Masa}\left(\frac{1{,}580\ \text{semillas}}{kilogramo}\right)$$

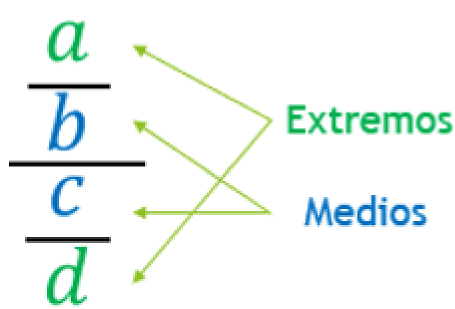
1.4 Proporción: Es la igualdad entre dos razones

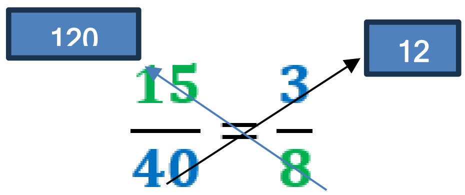
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

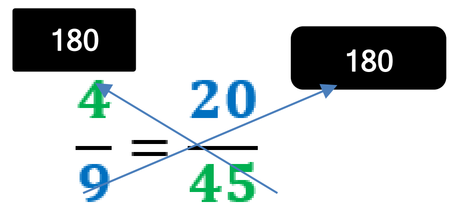
Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a \times d = b \times c$$







15 x 8 = 120 producto de extremos

40 x 3 = 120 producto de medios

4 x 45 = 180 producto de extremos

9 x 20 = 180 producto de medios

Determinar el valor desconocido de la siguiente proporción:

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

Diferentes formas de formar las proporciones equivalentes que darán el mismo producto cruzado:

$$\frac{4}{3} = \frac{20}{15}$$

$$\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{15} = \frac{4}{20}$$

$$\frac{20}{4} = \frac{15}{3}$$

Determine el elemento desconocido en las siguientes proporciones:

Ejemplos:

1) $\frac{5}{9} = \frac{15}{W}$

a) Método clásico:

$$w = \frac{9 \times \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = 27$$

En este método se multiplican los valores numéricos conocidos que van en una de las flechas, estos siempre van en el numerador y se dividen dentro del valor que va en el producto la flecha del valor desconocido (este valor siempre va en el denominador).

b) Método del producto cruzado:

$$135 \quad \frac{5}{9} = \frac{15}{\boxed{27}} \quad 135$$

27 es el valor que debe de tener w, para que el producto cruzado sea igual.

2) $\frac{12}{W} = \frac{6}{4}$

4 x 2 = 8 = w

3) $\frac{3}{2} = \frac{a}{6} = \frac{6}{b}$

$\frac{3}{2} = \frac{a}{6}$ 3 x 3 = 9 = a

$\frac{3}{2} = \frac{6}{b}$ 2 x 2 = 4 = b

1.5 Porcentaje:

Definición

- **Se llama tanto por ciento de un número, a una o varias partes de las cien partes iguales en que su puede dividir dicho número, es decir, uno o varios centésimos de un número.**

- **El signo del tanto por ciento es %**

Porcentaje (%)

Notación	Se lee	Obtenido de	Significado	Valor o equivalencia en decimal	Fracción irreducible
42%	Cuarenta y dos por ciento	$\frac{42}{100} \times 100 = 42\%$	42 partes de 100	$\frac{42}{100} = 0.42$	$\frac{42}{100} = \frac{21}{50}$
120%	Ciento veinte por ciento	$\frac{120}{100} \times 100 = 120\%$	120 partes de 100	$\frac{120}{100} = 1.20$	$\frac{120}{100} = \frac{6}{5}$
0.05%	Cero punto cero cinco por ciento	$\frac{0.05}{100} \times 100 = 0.05\%$	0.05 partes de 100	$\frac{0.05}{100} = 0.0005$	$\frac{0.05}{100} = \frac{1}{2000}$

Ejemplos:

1.

Encontrar el $\frac{5}{8}\ \%\ de\ 800$

800	100%
X	5/8 %

$$X = \frac{800 \times 5/8}{100} = 5$$

El 5/8% de 800 es 5

2.

▶ **Determine el número del cual 25 es el 5%**

25	5%
x	100%

$$X = \frac{25 \times 100}{5} = 500$$

25 es el 5% de 500

3.

▶ ¿Qué porcentaje es 109 de 5,000?

5000	100%
109	X

$$X = \frac{109 \times 100}{5000} = 2.18\%$$

109 ES EL 2.18 % DE 5,000

Tanto por ciento más: Es un porcentaje que esta arriba del 100%, el ejemplo clásico es el impuesto que se le incrementa a los bienes

Ejemplo 1

Porcentaje mas (Tanto por ciento mas)

Cierta institución, exenta del pago del impuesto sobre el valor agregado, IVA(que actualmente es 12%), le compra a la empresa "COMPARTS", accesorios para computadoras por un valor de Q1,792.00

Determine:

a) La cantidad que la institución le debe pagar a la empresa

b) El valor que deberá colocarse en la boleta de exención del IVA

Porcentaje mas
(Tanto por ciento mas)

- Como $12\% = \frac{12}{100} = 0.12$, y el IVA está incluido en el precio, entonces.

$$\frac{112}{100} = \frac{1{,}792}{X} \qquad X = \frac{100 \times 1{,}792}{112} = 1{,}600$$

1,792-1,600 =192

Deben cancelarse a la empresa Q1,600 y extender un documento de exención de IVA por Q192.00

Ejemplo 2.

Un refrigerador que tiene un precio de $4200.00, pero se debe de incrementar el 16% de impuesto por dicho artículo. ¿Cuál será el precio final del refrigerador?

Supuesto: 100%............4 200

Pregunta: 16%............X

Operaciones:

$$\frac{100}{16} = \frac{4200}{?}$$

Operaciones:

$$\frac{16 \times 4200}{100} = \$672.00$$

16% de IVA = $672.00

4 200 + 672 = $4 872.00

Valor del refrigerador más 16% de IVA = $4 872.00

Tanto por ciento menos: Es el porcentaje que esta abajo del 100%, el ejemplo clásico el descuento

- **¿Cual será el precio de oferta de un insecticida si el precio normal es de Q200.00 por litro y hay 25% de descuento?**

100%- 25% = 75%

Q200.00	100%
X	75%

$$X = \frac{200 \times 75}{100} = Q150.00$$

El precio de oferta del insecticida es de Q150.00

2. ALGEBRA:

2.1. Operaciones algebraicas:

MONOMIO:

Es una expresión algebraica que tiene un solo término.

Ejemplos:

a) $8x^3y^2z$

b) $10x$

POLINONIMO:

Es una expresión algebraica que está representada como una suma finita de términos. Cada término del polinomio tiene los coeficientes numéricos reales y las variables con exponentes positivos.

Ejemplos

a) $x^2 + 1$

b) $x^2 - 2x + 1$

OPERACIONES ALGEBRAICAS

SUMA:

Sume los siguientes polinomios

a) $3x-2y+1$; $4y-2x-7$

Vertical:

$$\begin{array}{l} 3x \quad -2y \quad +1 \\ \underline{-2x +4y -7} \\ \mathbf{x+2y-6} \end{array}$$

Horizontal:

$3x-2y+1+(4y-2x-7) = 3x-2y+1+4y-2x-7 = 3x-2x-2y+4y+1-7 = \mathbf{x+2y-6}$

b) $2c-2c^3+5c^2-4c+10c^3-7c^2 = 8c^3-2c^2-2c = \mathbf{-2c-2c^2+8c^3}$

RESTA

Realice las siguientes operaciones

- a) Dados los polinomios: A= 10x-5y-4 B=15x+6y-4

Opere: A- B

10x-5y-4 – (15x+6y-4) = 10x-5y-4-15x -6y+4 = -5x-11y

- b) 7 a +3b+6c – (2 a +5b -6c) = 7 a +3b+6c – 2 a - 5b +6c
  = 5 a-2b+ 12 c

MULTIPLICACIÓN

a) $-4x^2y\,(3z+y^2-4xy) =$ $-12x^2yz-4x^2y^3+16x^3y^2$

b) $(y-4)\,(y^2-8y+2) = y^3-8y^2+2y-4y^2+32y-8=$ $y^3-12y^2+34y-8$

DIVISIÓN:

$2x^2 + 3x + 4$

$x+2 \,\overline{)\, 2x^3 + 7x^2 + 10x + 8}$

$-2x^3$ [redacted] $4x^2$

$3x^2 + 10x$

$-3x^2$ [redacted] $6x$

$4x + 8$

$-4x$ [redacted] 8

0

Evaluación de una expresión algebraica: El valor numérico de una expresión algebraica puede calcularse cuando a cada literal de una expresión se le asigna un valor especifico.

Ejemplos

1. Si x = 2 ¿Cuál es el valor de la expresión $x^3 + 3x - 1$?

Lo que se realiza es sustituir el valor de x en donde aparece en la expresión

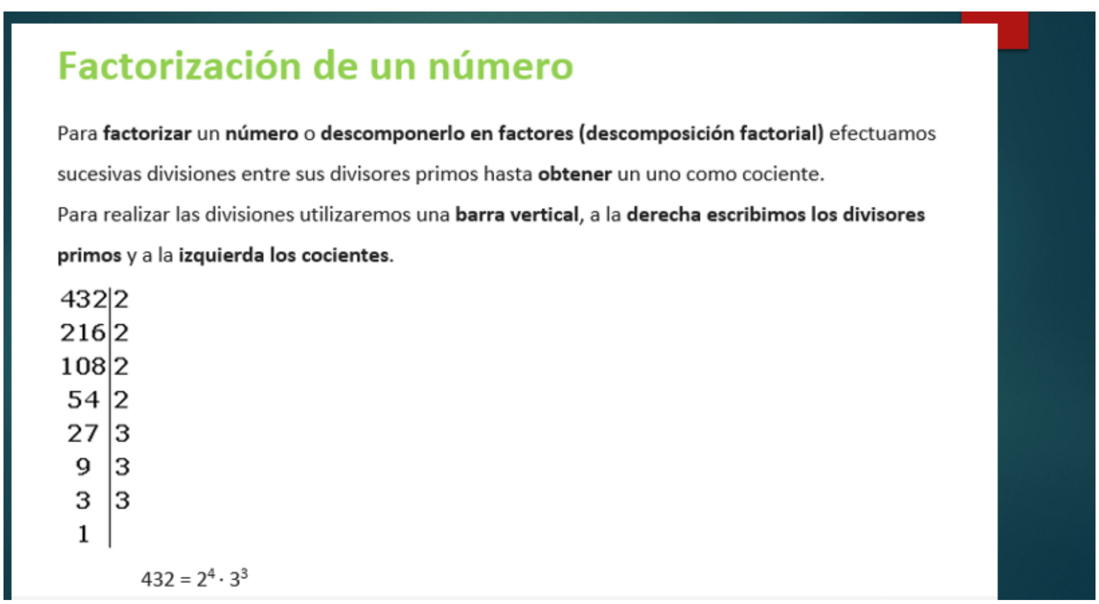
$2^3 + 3(2) - 1$
$8+6-1$
13

2. Si x = 3 y y= 4 ¿Cuál es el valor de la expresión $5x^2 - 7y$?

Lo que se realiza es sustituir el valor de x y de y en donde aparece en la expresión

$5(3)^2 - 7(4)$
$5(9) - 28$
$45-28$
23

2.2. Factorización:



Factorización de un polinomio:

Factorizar una expresión algebraica es el procedimiento que permite escribir como multiplicación dicha expresión (factores multiplicándose entre sí).

Los **factores** de una expresión algebraica, **son los términos**, ya sean números **y/o letras**, o que multiplicados entre sí dan como producto la primera expresión (POLINOMIO ORIGINAL)

Así, por ejemplo, si multiplicamos **a** por **a + b** podemos ver qué;

$$a(a+b)=a^2+ab$$

Dan como producto $\mathbf{a^2 + ab}$, entonces, los **factores** de esta expresión algebraica son **a** y **(a + b)**

También debemos saber que, no todos los polinomios algebraicos se pueden factorizar, ya que, al igual que en los números primos que sólo son divisibles por ellos mismos y por 1, hay expresiones algebraicas que también solo son divisibles por ellas mismas y por 1.

Ejemplos:

1. (x + y) solamente es divisible entre (x+y) y entre 1
2. **ax + by + cz**, no se puede factorizar ya que, solo es divisible por **ax + by + cz** y por **1**.

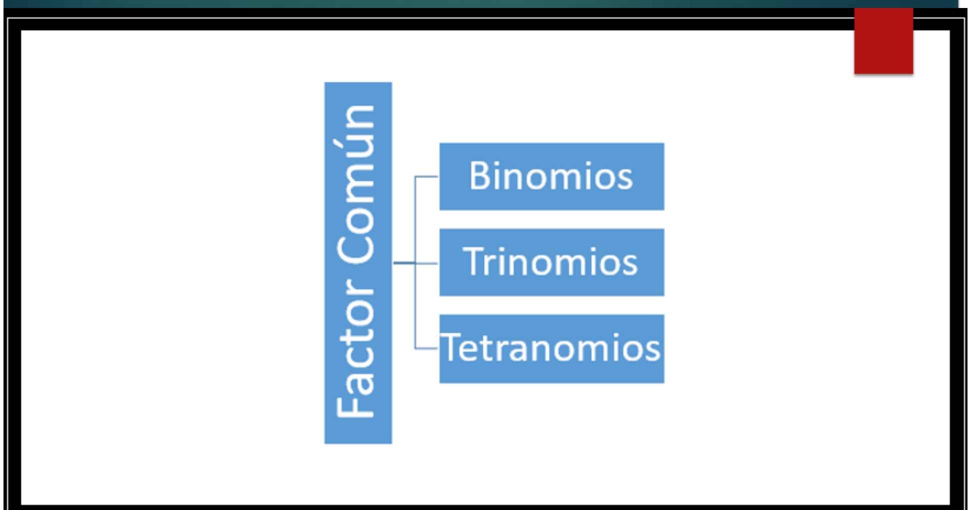
Se puede factorizar un polinomio algebraico utilizando los casos de factorización que se darán en la primera unidad o bien con división sintética

Pasos para poder factorizar:

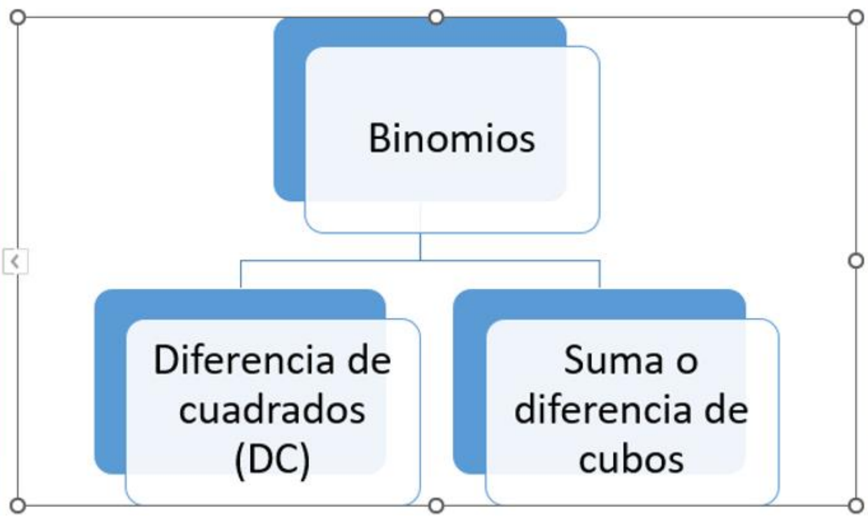
Los pasos para factorizar **un polinomio algebraico** son:

1º **Sacar factor común** si existe

2º Se cuenta sus términos para saber si es un binomio, trinomio o tetranomio, para determinar qué caso de factorización es, porque cada grupo de polinomios tienen sus propios casos de factorización



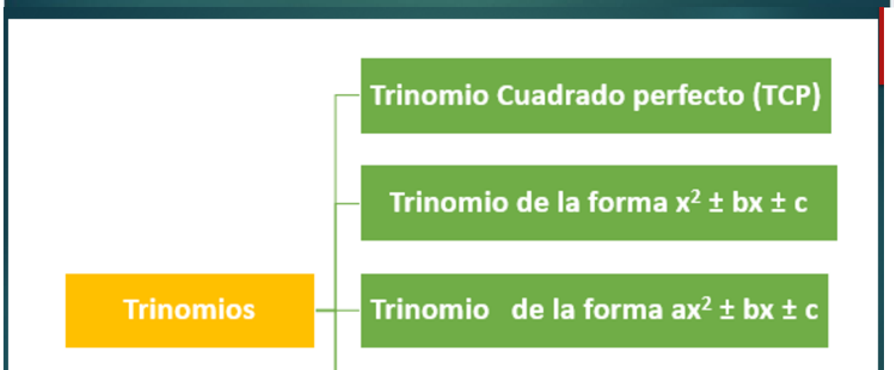
3º. Si es un binomio los casos pueden ser: diferencia de cuadrados (**DC**) o bien una suma o diferencia de cubos.



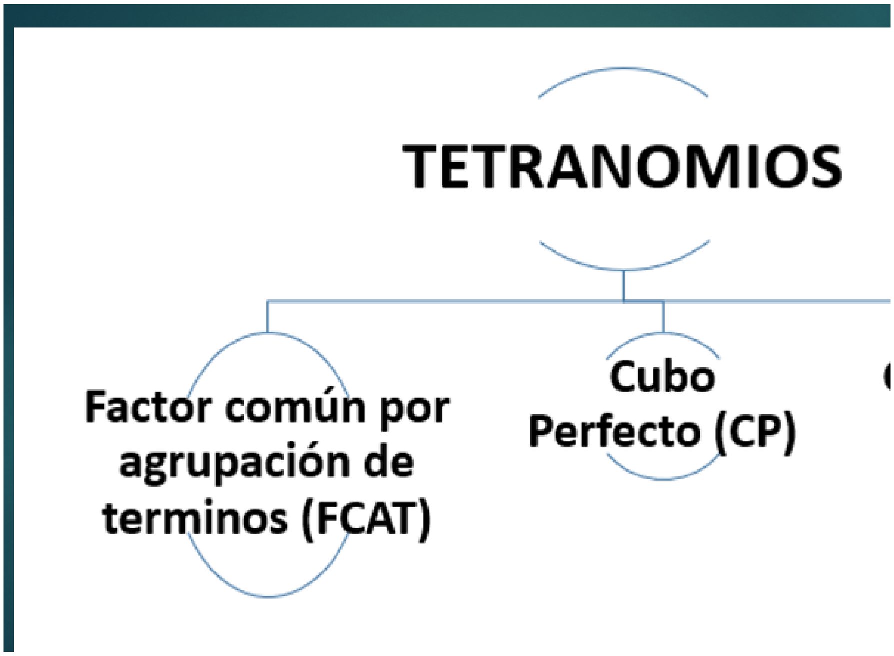
4^0. Si es un trinomio los casos pueden ser: Trinomio cuadrado perfecto (**TCP**),

Trinomio de la forma $x^2 \pm bx \pm c$ (**Segundo caso de los trinomios**),

Trinomio de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$ (**Tercer caso de los trinomios**) o completación del trinomio cuadrado perfecto (**CTCP**). Aquí también se incluye la suma de cuadrados perfectos



5^0. Si es un tetranomio los casos pueden ser: factor común por agrupación de términos (**FCAT**), cubo perfecto (**CP**) o combinación de casos



1. Factor común (CASO GENERAL)

Factor común de una expresión algebraica **es el máximo común divisor (m.c.d.)** de los términos que la componen. El mcd entre dos o más números ya sabemos cómo encontrarlos y si son letras, es la letra común con su menor exponente (**factores comunes con su menor exponente**).

Recuerde que siempre debe primero verificar si el polinomio tiene factor común. Se le conoce como caso general porque puede factorizar cualquier polinomio sin importar la cantidad de términos que tenga, siempre y cuando exista el factor común (FC).

Ejemplos;

1) Factorizar $x^2y + x^2z$.

Identificamos el factor común de **x^2y** y **x^2z** el cual es **x^2**, entonces dividimos los términos de la expresión dentro de **x^2**:

$x^2y \div x^2 = y$

$x^2 z \div x^2 = z$. Ahora escribimos la factorización;

$$x^2y + x^2z = x^2(y+z)$$

Factor común

2) Factorizar 8 m^2 - 12 mn.

Identificamos el **factor común** de **8 m^2** y **12 mn** el cual es **4m,** porque el mcd de 8 y 12 es 4, la letra que se repite con su menor exponente es m. Para obtener el factor que va entre paréntesis entonces dividimos los términos de la expresión por **4m:**

8 m^2 ÷ 4m = 2m

12 mn ÷ 4m = 3n. Ahora escribimos la factorización;

$$8m^2 - 12\ mn = 4m(2m - 3n)$$

Factor común

3) Factorizar 36 a + 24 b – 12 c .

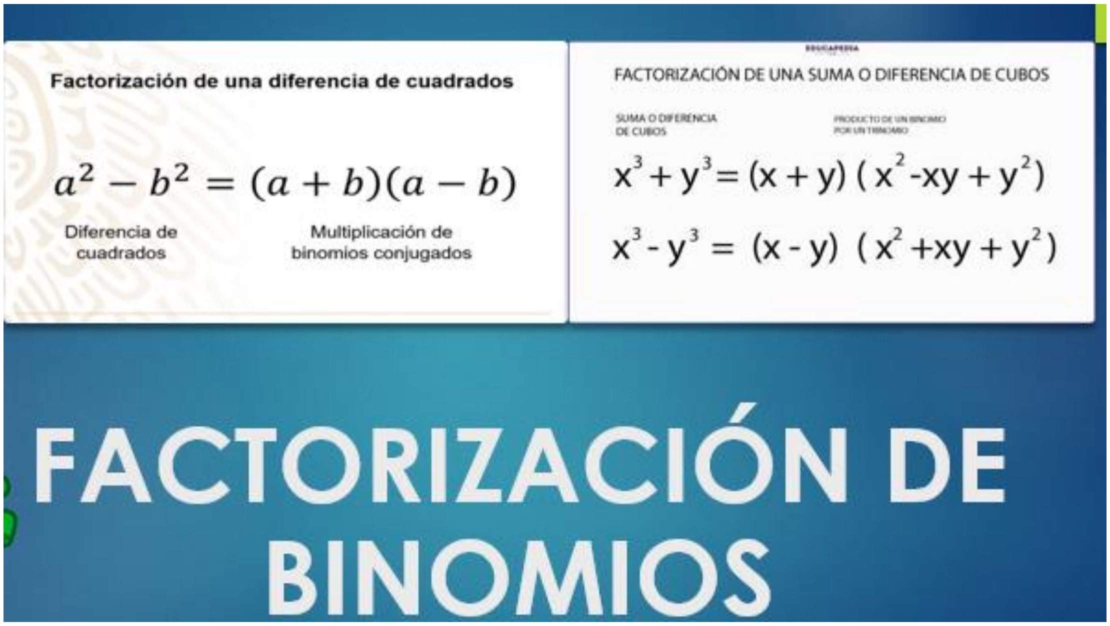
Identificamos el **factor común** 12**,** porque el mcd de 36, 24 y 12 es 12.

12 (3a + 2b – c)

NOTAS:

a. Una forma de comprobar es multiplicar el factor común con cada uno de los términos del polinomio y verificar que el resultado sea el polinomio original.

b. Recuerde que el polinomio que queda entre paréntesis debe de tener la misma cantidad de términos del polinomio original.



DIFERENCIA DE CUADRADOS (DC)

- **Características para ser una diferencia de cuadrados**:
- 1. Los dos términos deben de tener raíz cuadrada exacta
- 2. A los dos términos los separa un signo menos

Factorice completamente los siguientes polinomios algebraicos:

1. Factorizar $25 - 36x^2$

$$25 - 36x^2 = (5 + 6x)(5 - 6x)$$

$$25 \rightarrow 5 \qquad 36x^2 \rightarrow 6x$$

2. $x^2 - 4 =$ **$(x - 2)(x + 2)$**

3. $9y^2 - 4x^2 = (3y + 2x)(3y - 2x)$

4. $x^2 - 7$: No se puede factorizar (NSPF)

5. $27x^2 - 3$: $3(9x^2 - 1)$

   $3(3x - 1)(3x + 1)$

6. $x^4 - 16$: $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$

   $(x + 2)(x - 2)(x^2 + 4)$

SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS:

- **Características para ser una suma o diferencia de cubos:**
- 1. Los dos términos deben de tener raíz cubica exacta
- 2. El signo que separa a los dos términos puede ser más (+) o menos (-)

SUMA DE CUBOS (SCUB):

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Para **factorizar la suma de dos términos elevados al cubo**, se descompone en dos factores, donde;

- El primer factor, es la suma de sus raíces cúbicas.

- El segundo factor, es el cuadrado de la primera raíz, menos el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplos:

1. Factorizar $a^3 + 27$.

- La raíz cubica de a^3 es a, y de 27 es 3.

- Según la fórmula sería, $(a + 3)\ (a^2 - a\ (3) + (3)^2)$.

$$a^3 + 27 = (a + 3)(a^2 - 3a + 9)$$

2. $8x^2 + x^2y^3 = x^2\ (8 + y^3)$

$x^2\ (2 + y)\ (4 - 2y + y^2)$

3. $1 + y^{6m} = (1 + y^{2m})\quad (1 - y^{2m} + y^{4m})$

4. $1 + x^6 = (1 + x^2)\ (1 - x^2 + x^4)$

DIFERENCIA DE CUBOS (DCUB):

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Para **factorizar la diferencia de dos términos elevados al cubo**, se descompone en dos factores, donde;

- El primer factor, es la diferencia de sus raíces cúbicas.

- El segundo factor, es el cuadrado de la primera raíz, más el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplos:

1. Factorizar $x^3 - 125$.

- La raíz cubica de x^3 es x, y de 125 es 5.

- Según la fórmula sería, $(x - 5)\ (x^2 + x\ (5) + (5)^2)$.

$$x^3 - 125 = (x - 5)(x^2 + 5x + 25)$$

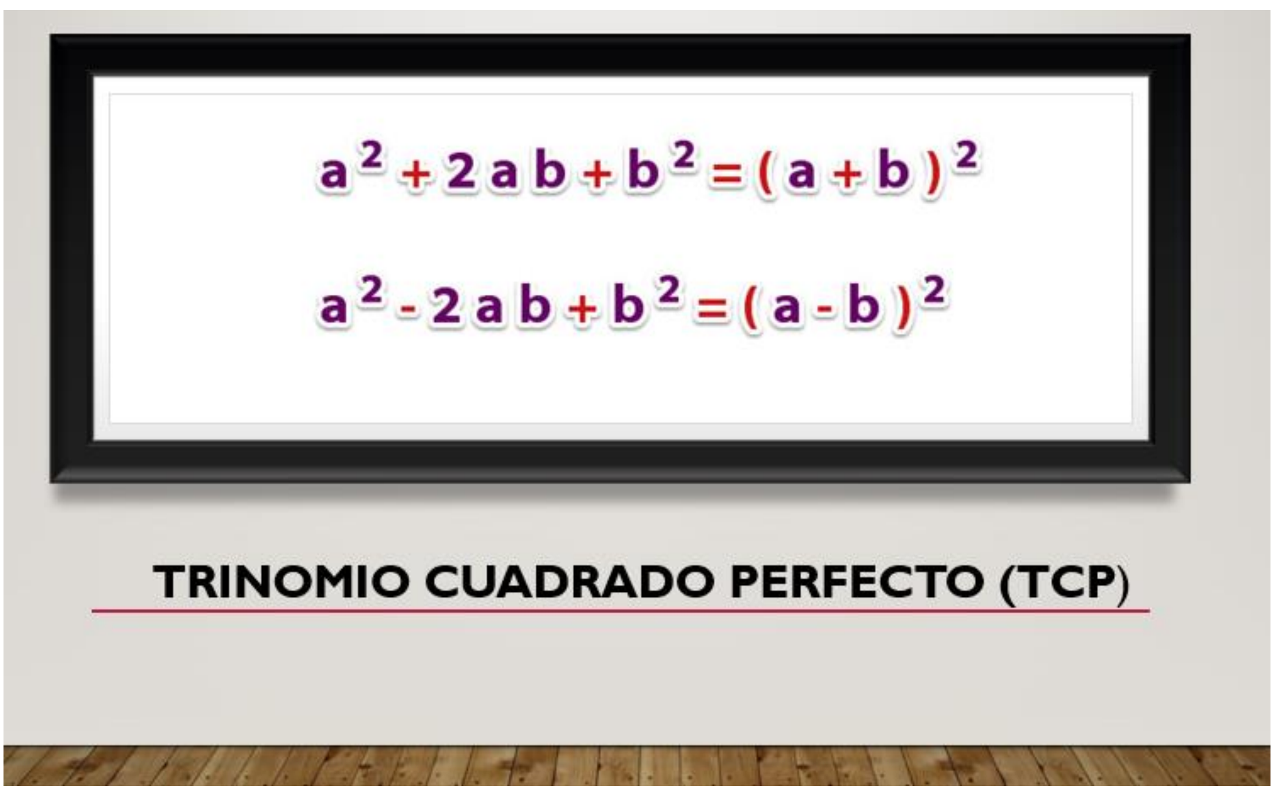
2. $1 - x^6$ En una diferencia de cubos cuando tenemos polinomios como el presente ejemplo,

PRIMERA FORMA:

$1 - x^6 = (1 - x^3)\ (1 + x^3)$ Primero la diferencia de cuadrados

$(1 - x)\ (1 + x + x^2)\ (1 + x)\ (1 - x + x^2)$ Luego como una diferencia y suma de cubos

$\underbrace{x^2}_{x \cdot x} + 6x + \underbrace{5}_{1 \cdot 5} = (x+1)(x+5)$
FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS
2x +3 =+12x
4x -5 =-10x
8x² -15 2x
por
Suma
$2x^2 - 7x - 15 = 0$
(2x+3) (x-5) = 0
HAGA CLIC PARA AGRE
SUBTÍTULO
FACTORIZAR
TRINOMIO CUADRADO PERFECTO
$4x^4 - 12x^2y^3 + 9y^6$
$(2x^2 - 3y^3)^2$



$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (TCP)

REQUISITOS Y CARACTERÍSTICAS PARA QUE SEA UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO:

- 1. Debe de estar ordenado en forma ascendente o descendente
- 2. Ya ordenado los signos deben de ser + + + o bien + - +
- 3. Ya ordenado debe de tener raíz cuadrada exacta el primero y el tercer término del trinomio
- 4. Se debe de comprobar que el producto de la raíz del primer término por la raíz del tercer término por 2 sea igual al segundo término del trinomio

Ejemplo:

- Factorizar $4x^2 - 12xy + 9y^2$

Recuerda que el signo del segundo término es el que determina el signo del binomio.

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$$

$2x$ $\quad$ $3y$

Segundo termino: $2(2x)(3y) = 12xy$

TRINOMIO DE LA FORMA $X^2 \pm \mathrm{Bx} \pm \mathrm{C}$ SEGUNDO CASO DE LOS TRINOMIOS

$$x^2 + bx + c = (x+m)(x+n)$$

Tal que $m + n = b$ y $m \cdot n = c$

REQUISITOS Y CARACTERÍSTICAS PARA QUE SEA UN SEGUNDO CASO DE LOS TRINOMIOS

- 1. Debe de estar ordenado en forma ascendente o descendente (**PREFERIBLE)**
- 2. **El coeficiente del primer término es 1**.
- 3. El primer término tiene raíz cuadrada exacta.
- 4. El segundo término tiene la misma letra que el primero con exponente que es la mitad que el exponente del primer término, y su coeficiente es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.
- 5. El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primer y segundo término, y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

1) Factorizar $x^2 + 9x + 14$.

El trinomio se descompone en dos binomios, donde el primer término de ellos será la raíz cuadrada de x^2, o sea x.

Cuando el **segundo y tercer término del trinomio son positivos**, ambos binomios tendrán **signo positivo**.

Los segundos términos de los binomios serán dos números que sumados den 9 y multiplicados den 14.

$$x^2 + \underset{\boxed{7+2}}{\underset{\uparrow}{9}}x + \underset{\boxed{7 \cdot 2}}{\underset{\uparrow}{14}} = (x + 7)(x + 2)$$

2 **actorizar $m^2 + 5m -14$.**

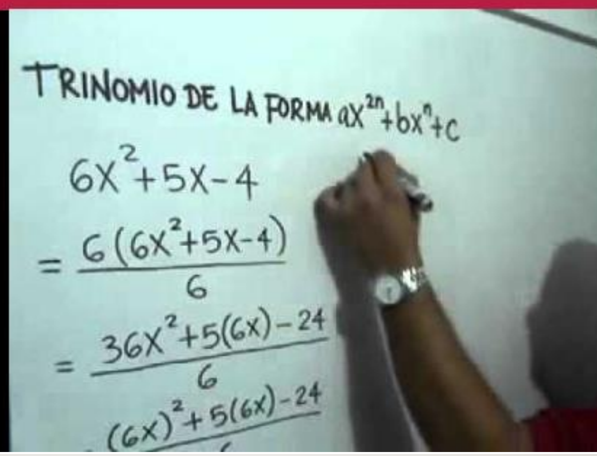
El trinomio se descompone en dos binomios, donde el primer término de ellos será la raíz cuadrada de m^2, o sea m.

Cuando el **segundo término del trinomio es positivo y tercer término negativo**, los binomios tendrán **signo destinos, donde el número de mayor valor absoluto será positivo**.

Los segundos términos de los binomios serán dos números que sumados den 5 y multiplicados den - 14.

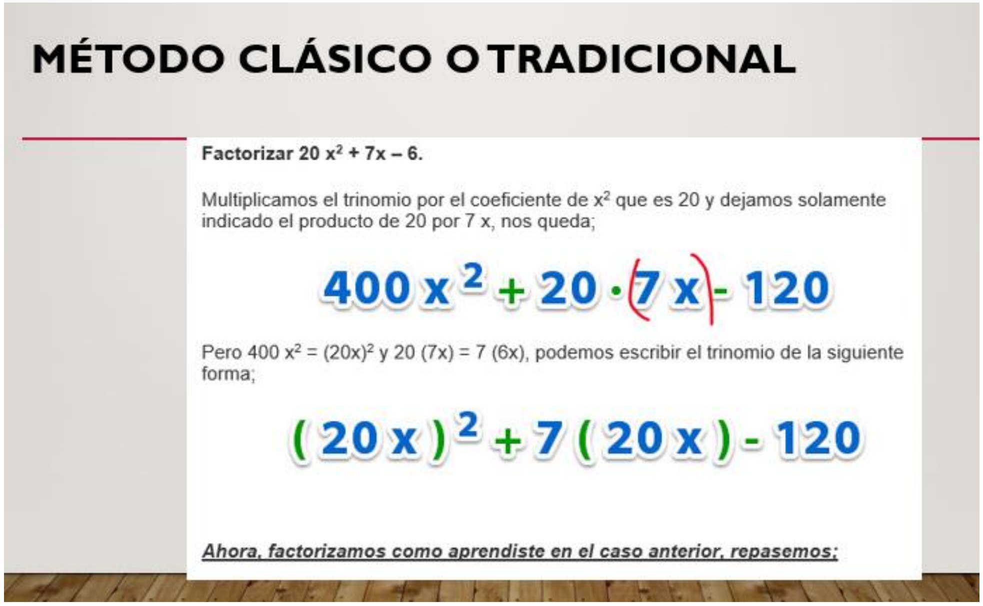
$$m^2 + \underset{\boxed{7+(-2)}}{\underset{\uparrow}{5}}m - \underset{\boxed{7 \cdot -2}}{\underset{\uparrow}{14}} = (m + 7)(m - 2)$$

TRINOMIO DE LA FORMA
$$AX^2 \pm Bx \pm C$$
TERCER CASO DE LOS TRINOMIOS



REQUISITOS Y CARACTERÍSTICAS PARA QUE SEA UN TERCER CASO DE LOS TRINOMIOS

- 1. Debe de estar ordenado en forma ascendente o descendente (**PREFERIBLE)**
- 2. **El coeficiente del primer término es diferente de 1 y jamás es cero**.
- 3. La letra del primer término tiene raíz cuadrada exacta y generalmente el coeficiente no tiene raíz cuadrada exacta.
- 4. El segundo término tiene la misma letra que el primero con exponente que es la mitad que el exponente del primer término, y su coeficiente es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.
- 5. El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primer y segundo término, y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.



El trinomio se descompone en dos binomios, donde el primer término de ellos será la raíz cuadrada de $(20\,x)^2$, o sea 20 x.

Cuando el **segundo término del trinomio es positivo y tercer término negativo**, los binomios tendrán **signo destinos, donde el número de mayor valor absoluto será positivo**.

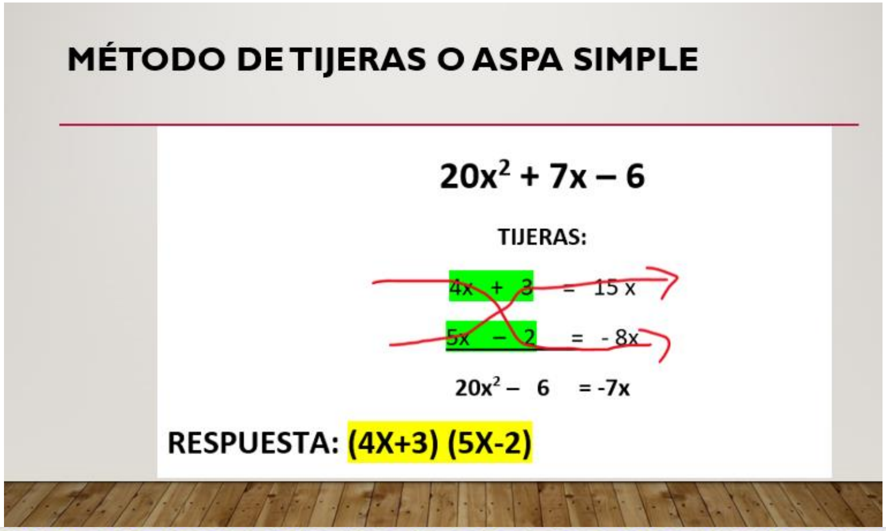
Los segundos términos de los binomios serán dos números que sumados den 7 y multiplicados den - 120.

$$(20\,x)^2 + \underset{\uparrow\ 15 + (-8)}{7}\,(20\,x) - \underset{\uparrow\ 15 \cdot (-8)}{120} = (20\,x + 15)(20\,x - 8)$$

$$\frac{5\,(4x+3)4(5x-2)}{20}$$

$$\frac{\cancel{5}\,(4x+3)\cancel{4}(5x-2)}{\cancel{5}\,(\cancel{4})}$$

$$(4x+3)\,(5x-2)$$


MÉTODO DE TIJERAS O ASPA SIMPLE
$20x^2 + 7x - 6$
TIJERAS:
$4x + 3 = 15x$
$5x - 2 = -8x$
$20x^2 - 6 = -7x$
RESPUESTA: (4X+3) (5X-2)


FACTORIZACIÓN DE TETRANOMIOS

FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

Factoriza
$3x^2 + 2x + 15x + 10$

-Agrupa:

$\rightarrow (3x^2 + 2x) + (15x + 10)$

-Saca factor común 1 vez en cada término:

$\rightarrow x(3x+2) + 5(3x+2)$

-Saca factor común por 2 vez y listo:

$\rightarrow (3x+2)(x+5)$

Platzi

PASOS PARA DETERMINAR SI ES FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS

1. Revisar si los 4 términos están ordenados (generalmente si lo están)
2. Descartar un cubo perfecto
3. Generalmente ninguno de los 4 términos tiene raíz cubica exacta
4. Revisar si ya ordenados se pueden agrupar los dos primeros términos y los dos segundos términos
5. Los dos paréntesis generalmente tiene factor común
6. Debe quedar un factor común dentro de los dos paréntesis
7. Si ya ordenado el tercer termino es negativo se debe de tener cuidado

$$am + bm + an + bn.$$

$$am + bm + an + bn =$$

$$= (am + bm) + (an + bn)$$

$$= m(a + b) + n(a + b)$$

Binomio común

$$= \boxed{(a + b)(m + n)}$$

$$am + bm + an + bn$$

$$\boxed{am + an + bm + bn}$$

$$= (am + an) + (bm + bn)$$

$$= a(m + n) + b(m + n)$$

Binomio común

$$= \boxed{(m + n)(a + b)}$$

$$6m - 9n + 21nx - 14mx =$$

$$= (6m - 9n) + (21nx - 14mx)$$

$$= 3(2m - 3n) + 7x(3n - 2m)$$

$$= 3(2m - 3n) - 7x(-3n + 2m)$$

$$= 3(2m - 3n) - 7x(2m - 3n)$$

Binomio común

$$= \boxed{(2m - 3n)(3 - 7x)}$$

$$6m - 9n + 21nx - 14mx =$$

$$\boxed{6m - 14mx - 9n + 21nx}$$

$$= (6m - 14mx) - (9n - 21nx)$$

$$= 2m\underbrace{(3 - 7x)} - 3n\underbrace{(3 - 7x)}$$

Binomio común

$$= \boxed{(3 - 7x)(2m - 3n)}$$

CUBO PERFECTO

CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

Cubo de un binomio → Cuatrinomio

$$(a + b)^3 = \boxed{a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3}$$

$$x^3 + 6.x^2 + 12.x + 8 = \boxed{(x + 2)^3}$$

$$\sqrt[3]{x^3} = \boxed{x} \qquad 3.x^2.2 = 6x^2$$

$$\sqrt[3]{8} = \boxed{2} \qquad 3.x.2^2 = 12x$$

PASOS PARA DETERMINAR SI ES CUBO PERFECTO

1. El tetranomio debe de estar ordenado en forma ascendente o en forma descendente. Si hay dos letras una está ordenada en forma descendente y otra en forma ascendente.

2. Ya ordenado se ven los signos que puede ser: + + + + o + - + -

3. Ya ordenado el primero y el cuarto termino tienen raíz cubica exacta

4. Se verifica que tres veces el producto de la raíz cúbica del primero al cuadrado, por la raíz cúbica del cuarto da el segundo término

5. Se verifica que el tercer término debe ser tres veces el producto de la raíz cubica del primero por el cuadrado de la raíz cúbica del cuarto.

Factorizar $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

la raíz cubica de a^3 es **a**, y la raíz cubica de 1 es **1**

Segundo término: $3(a)^2\,(1) = \mathbf{3a^2}$.

Tercer término: $3(a)(1)^2 = \mathbf{3a}$.

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a + 1)^3$$

Factorizar $2x^3-12x^2+24x-16$

Primero obtenemos factor común en este caso es 2

$2(x^3-6x^2-12x-8)$ Vemos que el tetranomio está ordenado en forma descendente (otra opción es que este ordenado en forma ascendente). Vemos que los signos son alternos (+ - + -), luego obtenemos la raíz cubica del primero y del cuarto termino que son x y 2 respectivamente.

Finalmente, al revisar que $3(x)^2\,2 = 6x$ y que $3\,x\,(2)^2 = 12x$ nos dan el segundo y tercer término respectivamente.

$2(x-2)^3$

Factorizar $1 + 12\,a^2b^2 - 6ab - 8\,a^3b^3$

Podemos observar que el tetranomio no está ordenado solo con ver los signos que si existen negativos deben de ir alternos empezando con el signo positivo en el primer término si esta ordenado en forma ascendente.

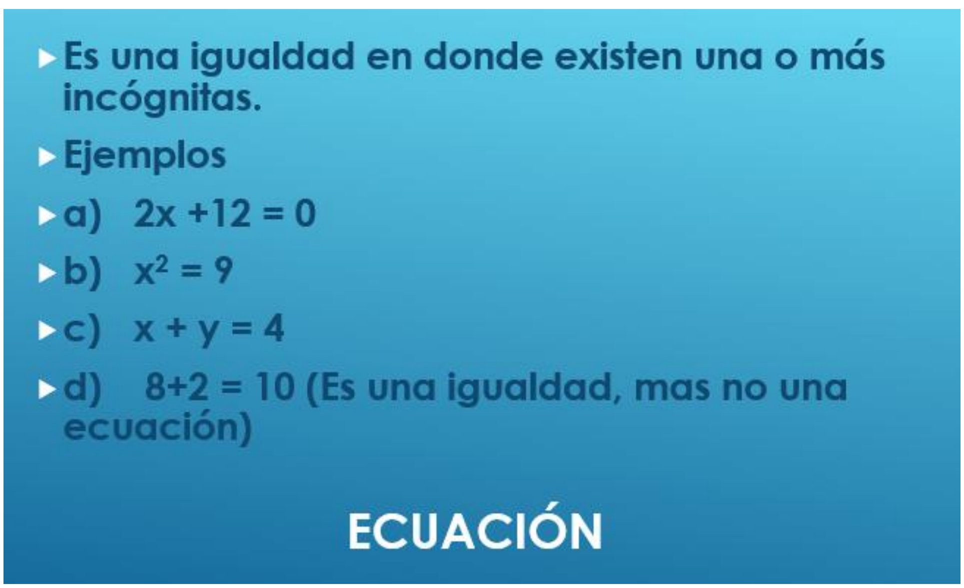
$1 - 6ab + 12\,a^2b^2 - 8\,a^3b^3$

Vemos que el primer y cuarto término tienen raíz cubica exacta que son 1 y 2ab respectivamente y al hacer la comprobación del tercer termino ($3\,(1)^2\,(2ab) = 6\,ab$ y cuarto término ($3\,(1)\,(2ab)^2 = 12\,a^2b^2$

$(1-2ab)^3$

2.3. Ecuaciones

2.3.1.



GRADO DE UNA ECUACIÓN:

Es el mayor exponente de la incógnita, cuando la ecuación tiene una sola incógnita.

El grado de una ecuación es el número máximo de soluciones de una ecuación.

Ejemplos

a) $2x = 8$ Primer grado (lineal)

b) $x^2-6x + 9 = 0$ Segundo grado (cuadrática)

- Es el valor o los valores numéricos que al sustituir o sustituirlos en la incógnita de la ecuación original hacen verdadera la igualdad.
- Ejemplo:
- $2\,x = 8$
- $2(4) = 8$
- $8=8$
- $X = 4$
- X esta despejada, cuando el coeficiente y el exponente de la x sea 1.

RAICES O SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Es el valor o los valores numéricos que resuelven la ecuación.

Ejemplo

$x^2 = 9$ Conjunto solución {3 y -3 }

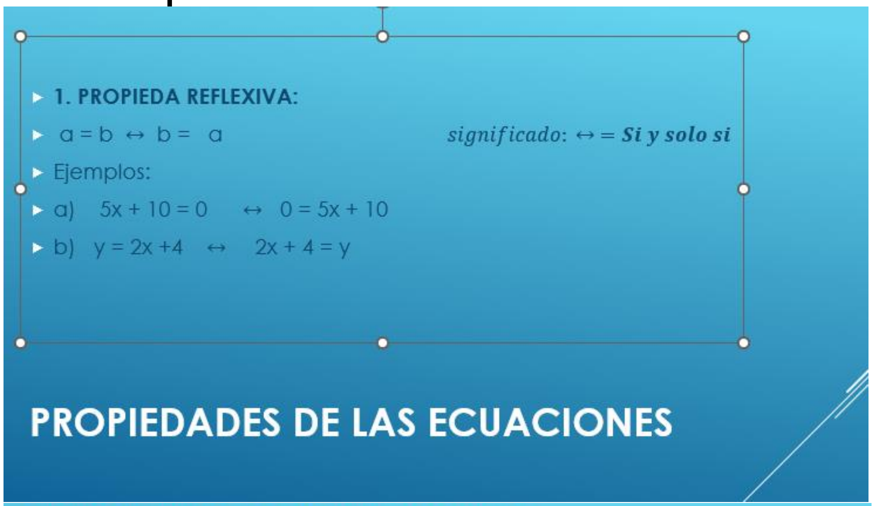
o $x_1 = 3$ y $x_2= -3$

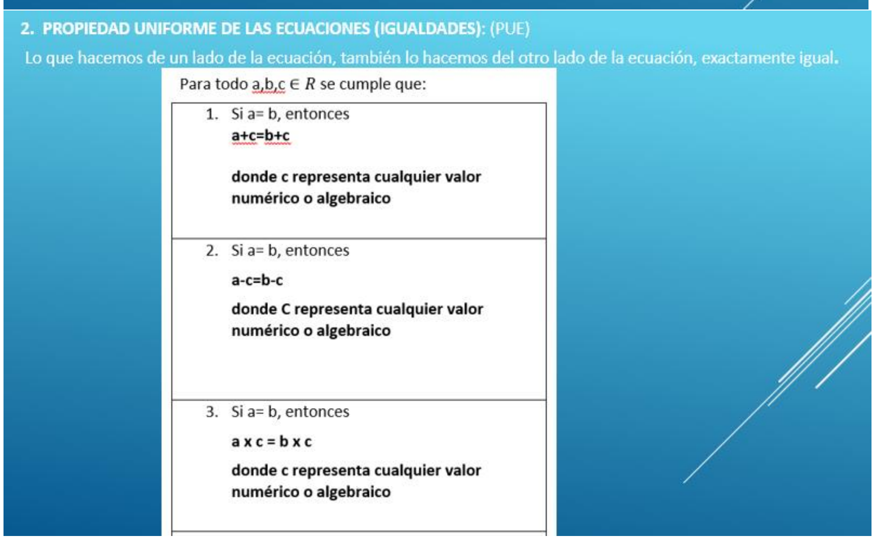
Porque:

$3^2 = 9$ $(-3)^2 =9$

$9=9$ $9 = 9$

2.3.2. Propiedades de las ecuaciones:





4. Si a= b, entonces $$a \div c = b \div c$$ **Donde c representa cualquier valor numérico y generalmente no puede ser un valor algebraico**
5. Si a= b; entonces $$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$$ **Donde n representa cualquier valor numérico**
6. Si a= b, entonces **$(a)^n = (b)^n$** **Donde n representa cualquier valor numérico**

Si sumamos o restamos, un valor numérico real, algebraico o alfanumérico en un lado de la ecuación, del otro lado de la ecuación hacemos lo mismo, para que la ecuación resultante sea equivalente a la ecuación original.

Ejemplos:

$x-7 = 0$

$x - \cancel{7}\ \cancel{+7} = 0$ **+7** **x =7** **porque** **7**-7 = 0

$x+3 = 0$

$x + \cancel{3}\ \cancel{-3} = 0$**-3** **x=-3** **porque** **-3 +** 3= 0

Si multiplicamos o dividimos un lado de la ecuación **por un valor numérico**, en un lado de la ecuación, del otro lado de la ecuación hacemos lo mismo, para que la ecuación resultante sea equivalente a la ecuación original.

Ejemplos

$x/5 = 2$

$\frac{x}{\cancel{5}}(\cancel{5}) = 2\,(5)$ **$x=10$** **porque 10/**$5 = 2$

$3x = 15$

$\cancel{3}x/\cancel{3} = 15/3$ **$x= 5$** **porque** $3(5) = 15$

NOTA:

Generalmente no se debe de multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación entre una expresión algebraica o alfanumérica, porque al hacerlo es posible que se eliminen soluciones de la ecuación.

Ejemplo

$x^2 - x = 0$

$x\,(x-1) = 0$

$x_1=0$ o $x-1 = 0$

$x-1 + 1= 0+1$ **porque $0^2-0 = 0$ $0= 0$**

$x_2= 1$ **$1^2 -1 = 0$ $0 = 0$**

Propiedad del elemento neutro de la multiplicación:

$a \times b = 0 \leftrightarrow a= 0 \vee b =0$ V = o inclusivo

FORMA ERRONEA DE REOLVER LA ANTERIOR ECUACIÓN CUADRATICA

$x^2 - x = 0$

$(X^2 -x)/x = 0/x$

$X^2/x - x/x = 0$

$X - 1= 0$ $x = 1$

Se eliminó cero como una de las soluciones de la ecuación.

Si elevamos al enésimo exponente en un lado de la ecuación, del otro lado de la ecuación hacemos lo mismo, para que la ecuación resultante sea equivalente a la ecuación original

$a)\ \sqrt[3]{x} = 2$

$(\sqrt[3]{x})^3 = 2^3$ **$x = 8$** **porque** $\sqrt[3]{8} = 2$ $2=2$

Si extraemos una raíz enésima de un lado de la ecuación, del otro lado de la ecuación hacemos lo mismo, para que la ecuación resultante sea equivalente a la ecuación original

$x^2 - 25 = 0$

$x^2 = 25$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$

$X = \pm 5$

Porque

$5^2 - 25 = 0$	**$(-5)^2 - 25 = 0$**
$25 - 25 = 0$	**$25 - 25 = 0$**
$0 = 0$	**$0 = 0$**

2.3.3. Ecuaciones lineales con una incógnita:

Posibles soluciones de una ecuación lineal con una incógnita:

- a) Una sola solución
- b) Ninguna solución
- c) Infinitas soluciones

Determine el conjunto solución de las ecuaciones lineales con una incógnita que a continuación se proponen

Ejercicios 5 A:

$(x-2)(4x+1) - (2x+3)^2 = 8$

$4x^2-7x-2-(4x^2+12x+9)=8$

$\cancel{4x^2}-7x-2-\cancel{4x^2}-12x-9=8$

$-19x\cancel{-11}\cancel{+11}=8+11$

$-19x=11+8$

$-19x=19$

$-19x/-19=19/-19$

$X=-1$

Verificar: Comprobar, sustituir $x=-1$

$(x-2)(4x+1) - (2x+3)^2 = 8$

$(-1-2)[4(-1)+1)] - (2(-1)+3)^2 = 8$

$(-3)(-3) - (-2+3)^2 = 8$

$9-(1)^2=8$

$8 = 8$

$2x -3 (4-x) = 5x +2$

$2x -12+3x = 5x +2$

$\cancel{5x}-12 = \cancel{5x} +2$

$-12 \neq 2$

La ecuación no tiene solución

$6 \; (2-x) = 2 (-3x+6)$

$\cancel{12} -\cancel{6x} = -\cancel{6x} +\cancel{12}$

$0=0$

La ecuación tiene infinitas soluciones

$5x -4 + 14x -19 = 18x +7x -16+23$

$19x -23 = 25X +7$

$19x -23-19x = 25X +7 -19x$

$-23 = 6X +7$

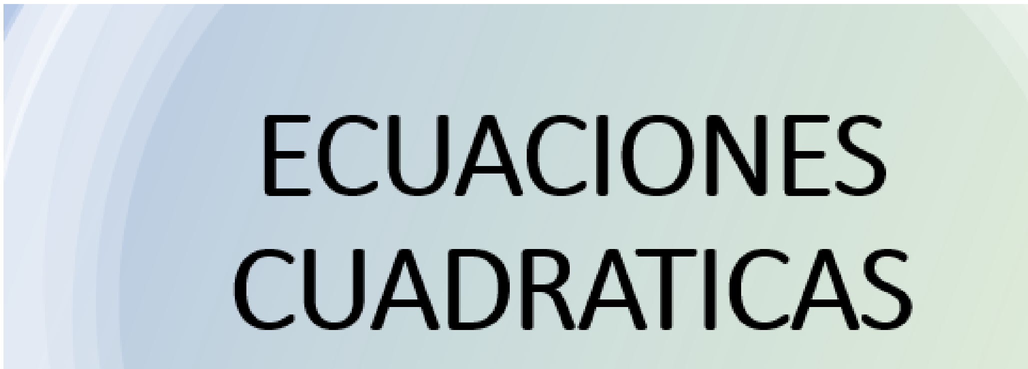
$- 23-7 = 6X +7-7$

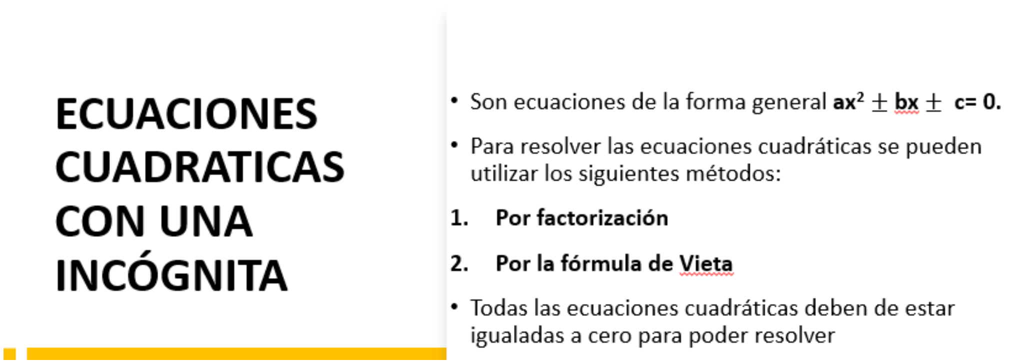
$-23-7 = 6X$

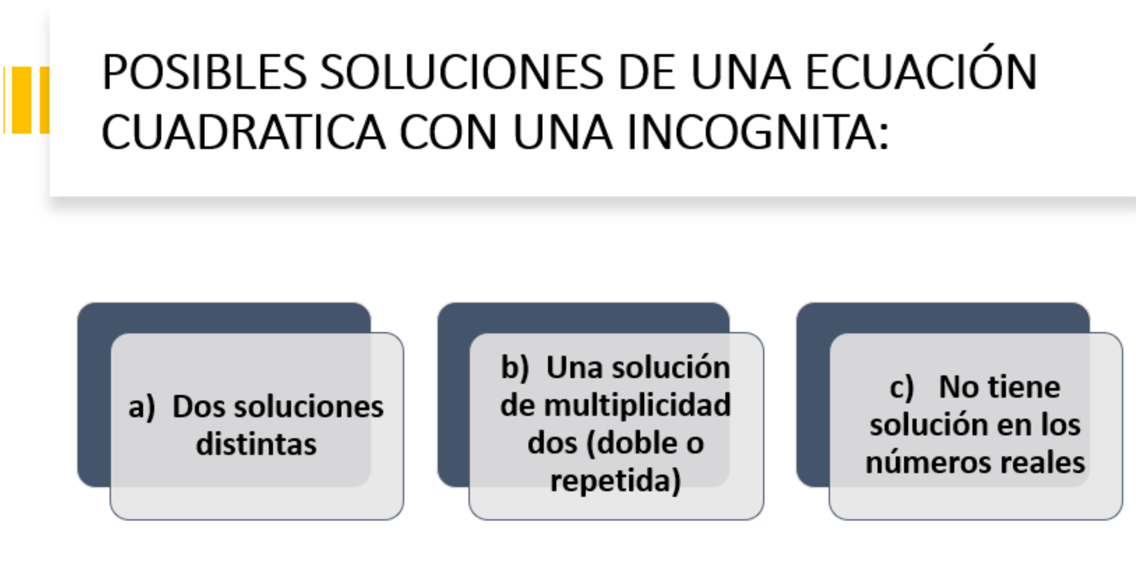
$-30/6 = 6X /6$

$-5 = x$

2.3.4. Ecuaciones cuadráticas con una incógnita:







POR FACTORIZACIÓN:

- No todas las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver por este método.
- Se utiliza la propiedad del elemento neutro de la multiplicación

$$(a \times b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0)$$

- Los casos de factorización que se pueden utilizar son:
- 1) Factor común (FC)
- 2) Diferencia de cuadrados (DC)
- 3) Trinomio cuadrado perfecto (TCP)
- 4) Trinomio de la forma $x^2 \pm bx \pm c$
- 5) Trinomio de la forma $ax^2 \pm bx \pm c$

- **x^2-49 = 0**
  - (x+7) (x-7) = 0
  - X+7-7 = 0 -7 o x-7+7= 0 +7
  - **X= -7 o x=7**
- Comprobar:
- X= 7
  - x^2-49 = 0 7^2-49 =0 49-49 = 0 0 = 0
- x=-7
  - x^2-49 = 0 $(-7)^2$ -49 0 49 -49= 0 0 = 0

x^2 + 9 -9= 0-9

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-9}$$

X= No tiene solución en los números reales (NTSNR)

Porque las raíces cuadradas de números negativos no existen en los números reales

x^2-x-56 = 0

(x- 8) (x+7) =0

x-8 +8= 0 +8   o   x+7-7= 0-7

x= 8   o   x= -7

$4x^2$+4x+1 = 0

$(2x+1)^2$= 0

(2x+1) (2x+1) = 0
2x+1 = 0

2x/2= -1 /2   **X=-1/2 multiplicidad dos o repetida**

POR LA FORMULA DE VIETA:

$ax^2 \pm bx \pm C = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2a}$$

El discriminante (D) = $b^2 - 4\,a\,c$.

El discriminante nos permite saber cuál puede ser la solución de una ecuación cuadrática.

a) Si $b^2 - 4\,a\,c > 0$ → La ecuación tiene dos soluciones distintas

b) Si $b^2 - 4\,ac = 0$ → La ecuación tiene una solución de multiplicidad 2

c) Si $b^2 - 4\,a\,c < 0$ → La ecuación no tiene solución en los reales

$21x^2-13x-20=0$

$a=21 \qquad b=-13 \qquad c=-20$

$D=(-13)^2-4(21)(-20)=169+1680=1849$

$$x=\frac{-(-13)\pm\sqrt{1849}}{2(21)}=\frac{13\pm43}{42}$$

$$x_1=\frac{13+43}{42}=\frac{56}{42}=\frac{4}{3}$$

$$x_2=\frac{13-43}{42}=\frac{-30}{42}=\frac{-5}{7}$$

$9x^2-30x+25=0$

$a=9 \qquad b=-30 \qquad c=25$

$D=(-30)^2-4(9)(25)=900-900=0$

$$x=\frac{-(-30)\pm\sqrt{0}}{2(9)}=\frac{30\pm0}{18}=\frac{30}{18}=\frac{5}{3}$$ **repetida**

$4x^2 + x + 3 = 0$

$a = 4$ $b=1$ $c = 3$

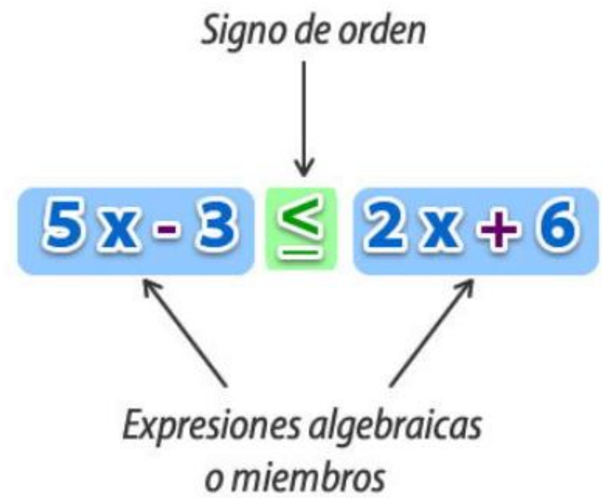
.

$D = 1^2 - 4(4)(3) = 1-48 = \mathbf{-47}$

la ecuación no tiene solución en los números reales

2.4. **Inecuaciones lineales con una incógnita**: Una inecuación es una desigualdad compuesta por dos expresiones algebraicas, relacionadas por los signos de orden; menor que (<), menor o igual que (≤), mayor que (>) o mayor o igual que (≥).

Ejemplo:



$$x - 2(x - 3) > 0 \rightarrow$$ *Inecuación lineal con una incógnita*

Intervalos

Un intervalo es un **subconjunto de los números reales**, el cual se puede representar a través de la recta numérica. Existen distintos tipos de intervalo, los cuales son;

1.1- Intervalo abierto:

Un **intervalo abierto**, de a a b, con $a < b$, es el conjunto de todos los números reales **mayores que a y menores que b**, es decir;

$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \, / \, a < x < b\}$$

Un intervalo abierto se puede escribir algebraicamente con paréntesis o con corchetes **hacia afuera**, los que indican que los extremos del intervalo no son parte del conjunto.

Su representación gráfica es;

Un intervalo abierto, se representa en la recta numérica con **dos círculos** e indica que aquellos números **no se incluyen** en el intervalo.

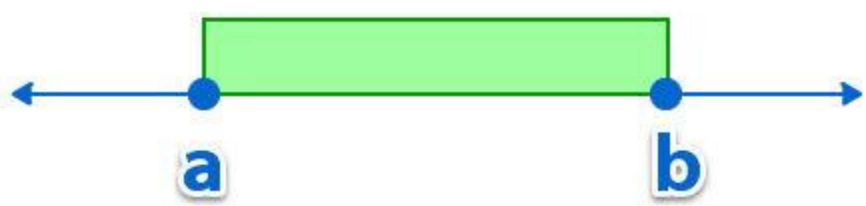
1.2- Intervalo cerrado:

Un **intervalo cerrado**, de *a* a *b*, con *a* < *b*, es el conjunto de todos los números reales **mayores o iguales que *a* y menores o iguales que *b***, es decir;

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$

Los corchetes hacia adentro indican que los extremos del intervalo son parte del conjunto.

Su representación gráfica es;



Un intervalo cerrado se representa en la recta numérica con **dos puntos** e indica que aquellos números **si están incluidos** en el intervalo.

1.3- Intervalo semiabierto:

Un **intervalo semiabierto**, (o también llamado semicerrado) es el conjunto de todos los números reales, **abierto por uno de sus lados y cerrado por el otro**. Es decir;

a. Intervalo semiabierto por la izquierda:

Un **intervalo semiabierto por la izquierda**, de *a* a *b*, con *a* < *b*, es el conjunto de todos los números reales **mayores que *a* y menores o iguales que *b***, es decir;

$$]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$$

Su representación gráfica es;

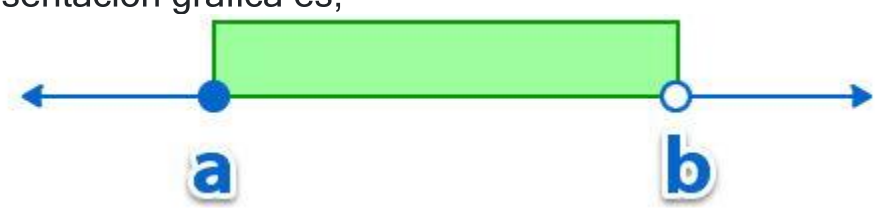
Un intervalo semiabierto por la izquierda se representa en la recta numérica con **un círculo por la izquierda y un punto por la derecha**, e indica que el número de la izquierda no está incluido en el intervalo y el de la derecha sí.

b. Intervalo semiabierto por la derecha:

Un **intervalo semiabierto por la derecha**, de *a* a *b*, con *a* < *b*, es el conjunto de todos los números reales **mayores o iguales que *a* y menores que *b***, es decir;

$$[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$$

Su representación gráfica es;



Un intervalo semiabierto por la derecha se representa en la recta numérica con **un punto por la izquierda y un círculo por la derecha**, e indica que el número de la izquierda si está incluido en el intervalo y el de la derecha no.

1.4- Intervalos indeterminados:

Los intervalos indeterminados son los que no están acotados o son infinitos, hacia los números reales positivos o hacia los números reales negativos. Existen 4 tipos;

a. Cuando el conjunto está formado por todos los números reales mayores o iguales que *a*;

$$[a, +\infty[\; = [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \, / \, x \geq a\}$$

Su representación gráfica es;

b. Cuando el conjunto está formado por todos los números reales mayores que *a*;

$$[a, +\infty[\; = [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \, / \, x > a\}$$

Su representación gráfica es;

c. Cuando el conjunto está formado por todos los números reales menores o iguales que *a*;

$$]-\infty, a] = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \, / \, x \leq a\}$$

Su representación gráfica es;

d. Cuando el conjunto está formado por todos los números reales menores que *a*;

$$]-\infty, a] = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$$

Su representación gráfica es;

- **fíjate y recuerda siempre en la simbología de los extremos;**

Extremo	Incluido	Rep. gráfica	Intervalo	Ecuación
Abierto	No	○	(,) ó] , [	$<$ ó $>$
Cerrado	Si	●	[,]	$\leq$ ó $\geq$

Ejemplo 1:

Expresa y representa como intervalo el siguiente conjunto;

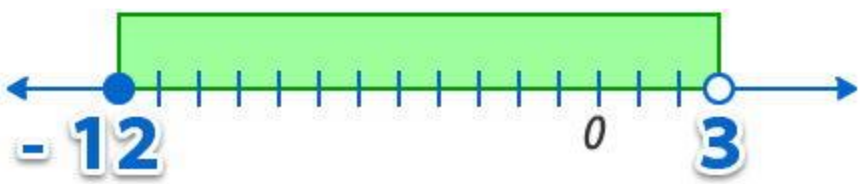
$$\{x \in \mathbb{R} \;/ -12 \leq x < 3\}$$

Para expresar este conjunto como intervalo, tenemos que escribir los números correspondientes a los extremos y verificar si son abiertos o cerrados para saber la orientación de los corchetes.

En este caso ***x*** es mayor o igual a **-12** (cerrado por la izquierda) y menor que **3** (abierto por la derecha), el conjunto quedaría expresado como;

$$[-12, 3[\quad \text{ó} \quad [-12, 3)$$

Y su representación gráfica quedaría;



Ejemplo 2:

Si tenemos la siguiente representación gráfica;

Escribe el intervalo y el conjunto que representa.

Si analizamos la representación gráfica, podemos ver que el conjunto que representa son todos los números reales mayores o iguales que – 2. Entonces, el conjunto se escribe;

$$[-2, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq -2\}$$

Fuente: https://www.portaleducativo.net/cuarto-medio/31/inecuaciones-lineales-intervalos

Ejemplos de solución de inecuaciones:

$$2x - 3 > x + 5$$ *Restamos x a ambos miembros*

$$2x - 3 - x > x + 5 - x$$

$$x - 3 > 5$$ .... *Sumamos 3 a ambos miembros*

$$x - 3 + 3 > 5 + 3$$

$$x > 8$$ .... *Solución*

1) Conjunto $\{x \in \mathbb{R} / x > 8\}$

2) Intervalo $]8, +\infty[$

3) Gráfica

Ejemplo:
Encontrar el conjunto solución para la desigualdad $x - 32 < 54$

$x - 32 < 54$	*La desigualdad a resolver.*
$x - 32 + 32 < 54 + 32$	*Sumamos +32 de ambos lados de la desigualdad.*
$x < 86$	*Obtenemos el resultado.*

De esto podemos concluir que el conjunto solución de la desigualdad es: $\{x \mid x < 86\}$, lo que quiere decir que x puede ser cualquier valor *menor* que 86.

Otro ejemplo

3. FUNCIONES:

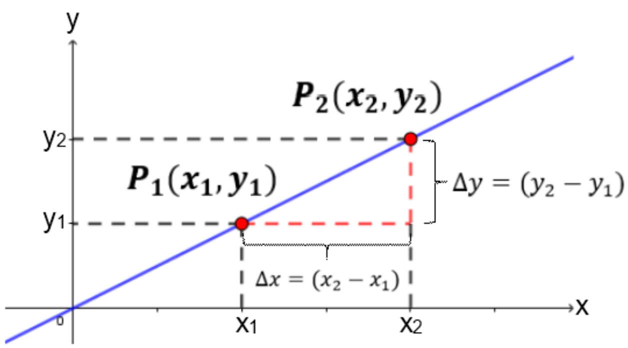
3.1. Función lineal o línea recta:

Toda ecuación y= mx + b, es una función lineal. Donde:

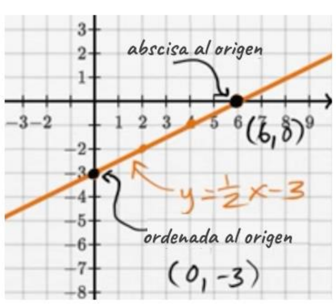
$m = pendiente = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Cambio\ vertical}{Cambio\ horizontal}$ (0, b) la ordenada al origen

<u>Donde</u>

m = pendiente de la recta que pasa por los puntos 1 y 2.
x_1 = abscisa del punto 1.
y_1 = ordenada del punto 1.
x_2 = abscisa del punto 2.
y_2 = ordenada del punto 2.

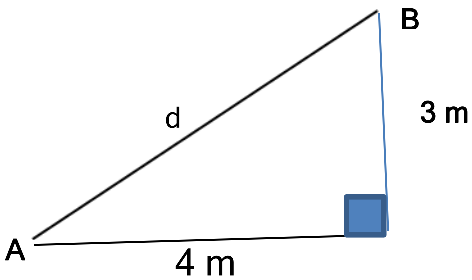


En el plano cartesiano podemos encontrar la abscisa el origen (a,0) que es la coordenada de x respecto al origen en el plano y también podemos encontrar a ordenada al origen (0, b) que es la coordenada del y respecto a el origen en el plano



Fuente: https://n9.cl/o4bfx

Ejemplo de pendiente (m) y % de pendiente:



$$m = \frac{3}{4} = \frac{Cambio\ vertical}{Cambio\ horizontal} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

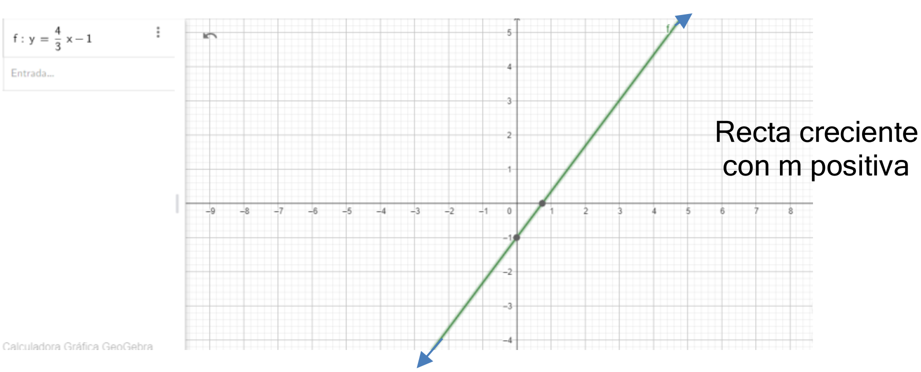
% de pendiente: ¾ x 100= 75% de pendiente

75/100 se interpreta, que por cada 100 unidades de movimiento en el plano horizontal en el plano vertical se mueve 75 unidades

Desde la perspectiva de un aumento en el recorrido, una pendiente es positiva cuando la relación ${}^{\Delta y}/_{\Delta x}$ es positiva, es decir, cuando dado un aumento en el plano de las abscisas, se da un aumento en el plano de las ordenadas.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Aumenta\ (diferencia+)}{Aumenta\ (diferencia+)} = \frac{(+)}{(+)} = (+)$$

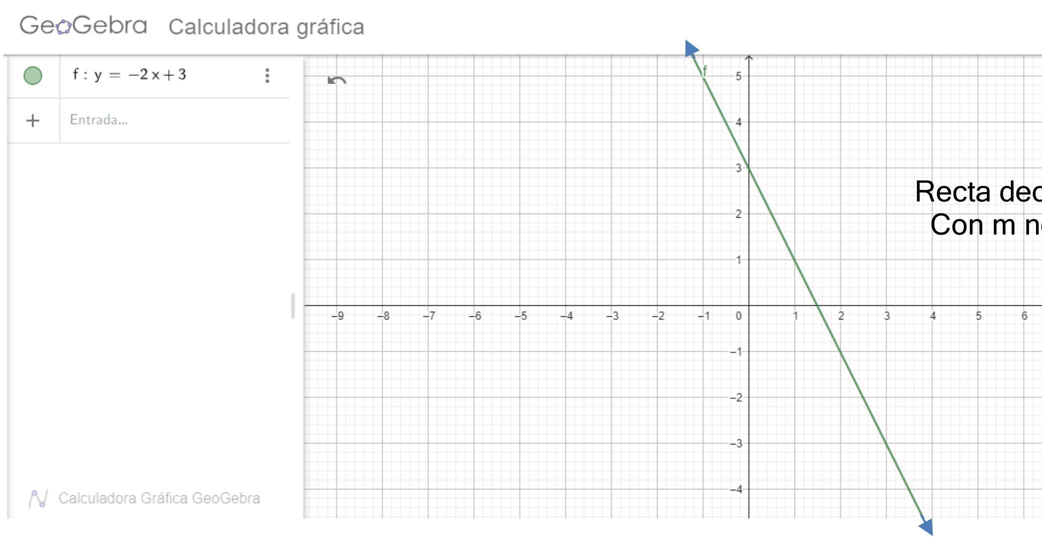
Ejemplo: $y = \frac{4}{3}x - 1$



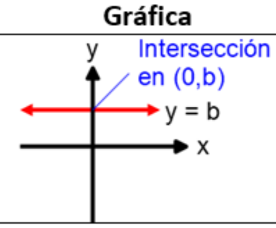
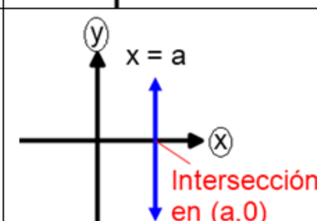
Una pendiente negativa se da cuando la relación ${}^{\Delta y}/_{\Delta x}$ es negativa, es decir, cuando dado un aumento en el plano de las abscisas, se da una reducción en el plano de las ordenadas.

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{Disminuye\ (diferencia-)}{Aumenta\ (diferencia+)}=\frac{(-)}{(+)}=(-)$$

Ejemplo y=-2x+ 3



Rectas horizontales y verticales

Recta		Ecuación	Pendiente	Gráfica
Horizontal	Paralela al eje x	$y=b$	$m=0$ Esto es debido a que no existe un cambio en la elevación de la recta ($\Delta y=0$).	
Vertical	Paralela al eje y	$x=a$	$m=\nexists$ No tiene pendiente puesto que no existe un recorrido o cambio en el plano horizontal ($\Delta x=0$), lo cual provoca que la pendiente no esté definida ya que la división entre cero, cualquiera que sea Δy, no está definida.	

Ejemplos

1. **Cuando se conoce la pendiente y el intercepto con el eje y (0, b)**

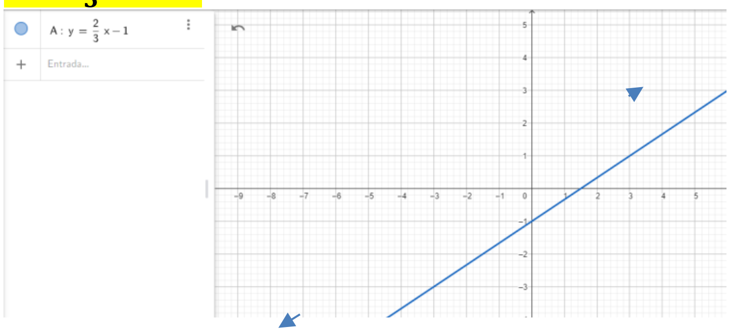
¿Cuál es la ecuación de la recta? Si m=2/3 y la recta corta al eje y en -1

Utilizo la ecuación y= mx + b

Tengo la pendiente =2/3   y el intercepto con el eje y (0, b) ósea (0,-1)
Porque es donde la recta corta al eje y.
Sustituimos los valores conocidos en la ecuación:

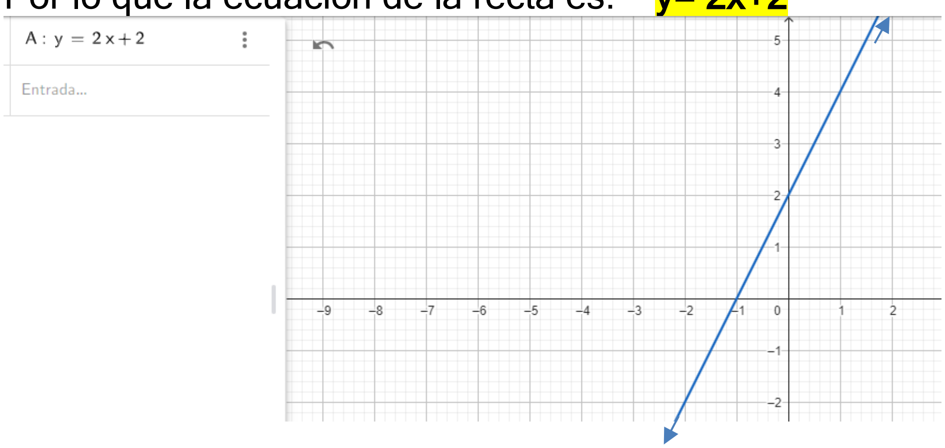
$$y = \left(\frac{2}{3}\right)x + (-1)$$

$$\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x - 1}$$



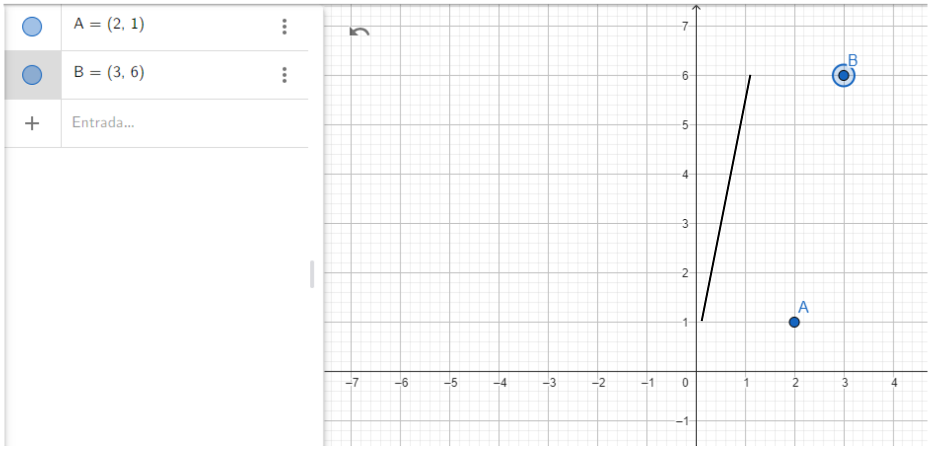
2. Cuando se conoce la pendiente y un punto por donde pasa la recta

¿Cuál es la ecuación de la recta? Que tiene m=2 y que pasa por el punto (-1,0)
Sustituimos los datos conocidos en la ecuación y= mx+b
En la coordenada (-1,0) x= -1 es la abscisa y la ordenada y=0
0= 2 (-1) + b
0= -2 + b
2= b
Por lo que la ecuación de la recta es: **y= 2x+2**



3. Cuando se conocen dos puntos por donde pasa la recta:

¿Cuál es la ecuación de la recta? Si la recta pasa por los puntos (2,1) y (3,6)

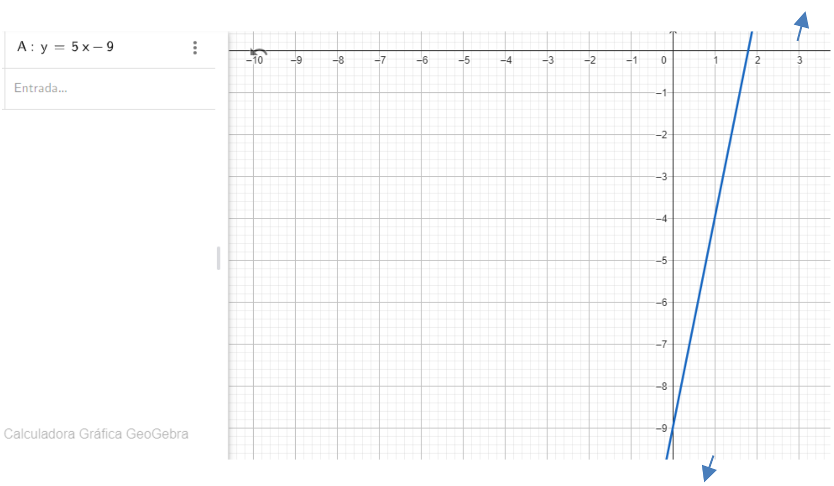


$$m = \frac{6-1}{3-2} = 5$$

Utilizo el punto (3,6), pero también se puede utilizar el otro punto

6 = 5 (3) + b
6 = 15 + b
6-15 = b
-9 = b

y= 5x - 9



Si tenemos una sola recta y queremos saber cual es la pareja ordenada que resuelve la igualdad de dicha ecuación, solamente necesitamos el valor de cualquiera de las incógnitas para poder encontrar el valor de la otra y así saber cual es la pareja ordenada que cumple con la igualdad.

Si la recta es: $y = 4x - 3$

Podemos utilizar decir que x=2 y de esa manera podemos encontrar el valor de y.

$Y = 4 (2) - 3$
$Y= 8-3 = 5$

Por lo que la pareja ordenada que resuelve o cumple la igualdad de la ecuación es (2,5) verifiquemos
$5= 4(2) - 3$
$5 = 8-3$
$5 = 5$

De forma similar podemos hacer si el valor que conozco es el de y,
De esa forma yo puedo encontrar el valor de x.

4. GEOMETRÍA PLANA:

La geometría plana estudia las figuras que tienen puntos que están en un mismo plano, abarca a los polígonos en general, así como al círculo.

4.1. Conceptos Básicos:

Son el punto, la recta y el plano. De estos elementos fundamentales podemos tener una idea abstracta, pero en base a postulados que determinan relaciones entre e ellos si se pueden definir.

PUNTO:
Es la unidad más pequeña de la geometría que no puede dividirse. No tiene dimensiones, pero si representa una posición en el espacio, determinada respecto de un sistema de coordenadas preestablecidas. Gráficamente se representa con un signo de puntuación y se le denomina con una letra mayúscula al costado (. A).

LINEA:

Es la representación de una sucesión continua e indefinida de puntos en el espacio. Presenta solo una dimensión (longitud). La línea también puede considerarse la distancia más corta entre dos puntos en un mismo plano. Se pueden clasificar en:

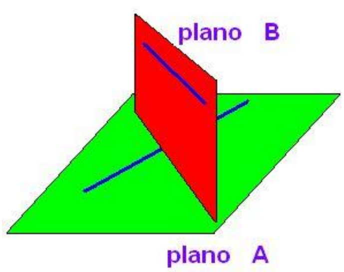
a) Línea Recta: Es una sucesión infinita de puntos que tienen una misma dirección, está compuesta de infinitos segmentos. Se pueden señalar por medio de dos puntos en el espacio.

b) **Semirrecta y rayo**: Están formados por todos los puntos de la recta que se encuentran a partir de un punto fijo de dicha recta (origen). A diferencia de la semirrecta, el rayo si contiene al punto de origen.

c) Segmento de recta: Está conformado por todos los puntos de la recta que se encuentran entre dos puntos fijos en dicha recta (extremos). Dicho segmento contiene a los dos puntos extremos (T y S) y representa la menor distancia entre ellos.

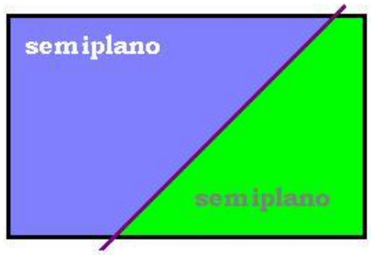
PLANO:

Es una superficie que tiene dos dimensiones sin espesor. Está conformado por infinitos puntos y
rectas, se representa con una letra mayúscula ubicada en una de sus esquinas (vértices).



Semiplano:

Son las partes de un plano que están delimitadas por cualquiera de sus rectas. Cada recta divide al plano en dos partes (dos semiplanos).



4.2 POLIGONOS:

Es la figura geométrica bidimensional que determina una región en el plano, formada por segmentos de recta consecutivos no alineados. La palabra polígono procede del griego (poli) “muchos” y (gona) “ángulo”.

a) Polígonos regulares:

Poseen sus ángulos y sus lados iguales. Entre ellos tenemos a: Triángulo equilátero, cuadrado, pentágono (5 lados) regular, hexágono (6 lados) regular, octógono (8 lados) regular, decágono (10 lados) regular, dodecágono (12 lados) regular.

b) Triángulos:

Un triángulo, en geometría, es la reunión de tres segmentos que determinan tres puntos del plano y no colineales. Cada punto dado pertenece a dos segmentos exactamente. Los puntos comunes a cada par de segmentos se denominan vértices del triángulo y los segmentos de recta determinados son los lados del triángulo. Dos lados contiguos forman uno de los ángulos interiores del triángulo. Un triángulo es una figura estrictamente convexa.
Un triángulo tiene tres ángulos interiores, tres ángulos exteriores, tres lados y tres vértices entre otros elementos.
Si está contenido en una superficie plana se denomina triángulo, o trígono, un nombre menos común para este tipo de polígonos.

La suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera será igual a 180^0.
$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Ejemplo: $74.9^0 + 53.5^0 + 51.6^0 = 180^0$.

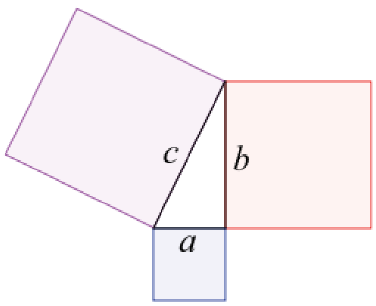
4.3 Teorema de Pitágoras:

El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo, el

cuadrado de la hipotenusa (el lado de mayor longitud del triángulo rectángulo) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (los dos lados menores del triángulo, los que conforman el ángulo recto).
Si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes a yb, y la medida de la hipotenusa es c, se establece que:

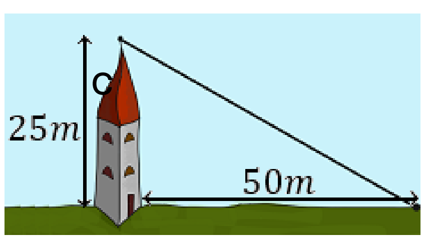
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Ejemplos:

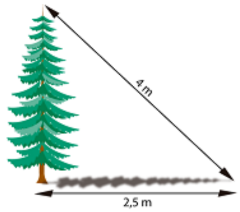
1. Se quiere colocar un cable desde la cima de una torre de 25 metros altura hasta un punto situado a 50 metros de la base la torre. ¿Cuánto debe medir el cable?



$C^2 = 25^2 + 50^2$
$C^2 = 3{,}125$
$C = \sqrt{3125} = \sqrt{625\ (5)} = \mathbf{25\sqrt{5}}$ **metros**

2. Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2.5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ¿cuál es la altura del árbol? Ver figura

h



$4^2 = h^2 + 2.5^2$

$4^2 - 2.5^2 = h^2$

$16 - 6.25 = h^2$

$9.75 = h^2$

$\sqrt{9.75} = h$

4.4 Cuadriláteros:

Un cuadrilátero es un polígono que tiene cuatro lados. Los cuadriláteros tienen distintas formas, pero todos ellos tienen cuatro vértices y dos diagonales. En todos los cuadriláteros la suma de los ángulos interiores es igual a 360º. Otros nombres usados para referirse a este polígono son tetrágono y cuadrángulo. Los cuadriláteros se clasifican de la siguiente forma:

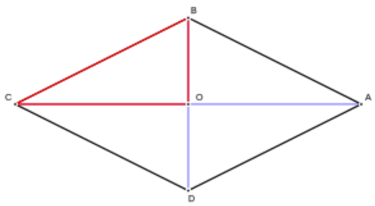
$$Cuadriláteros \begin{cases} Paralelogramos \begin{cases} Rectángulos \begin{cases} Cuadrado \\ Rectángulo \end{cases} \\ No\ rectángulos \begin{cases} Rombo \\ Romboide \end{cases} \end{cases} \\ No\ paralelogramos \begin{cases} Trapecios \begin{cases} Trapecio \\ Trapezoide \end{cases} \\ Deltoide \end{cases} \end{cases}$$

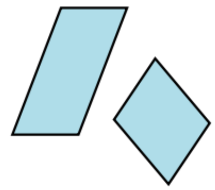
Paralelogramos

Un paralelogramo es un tipo especial de cuadrilátero (un polígono formado por cuatro lados) cuyos lados son paralelos dos a dos.

a) Paralelogramos rectángulos: Son aquellos cuyos ángulos internos son todos ángulos rectos. En esta clasificación se incluyen el cuadrado, el rectángulo.

b). **Paralelogramos no rectángulos:** Son aquellos que tienen dos ángulos internos agudos y dos ángulos internos obtusos. En esta clasificación se incluye: el rombo y romboide

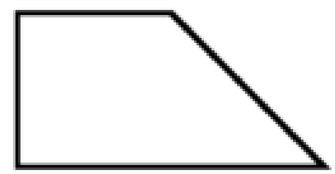




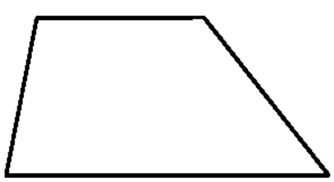
No paralelogramos

a) **Trapecio:** Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y otros dos no paralelos. Los lados paralelos se llaman bases del trapecio y la distancia entre ellos se llama altura. Se denomina mediana al segmento que tiene por extremos los puntos medios de los lados no paralelos. Existen tres tipos de trapecios los cuales son:

Trapecio rectángulo: Es el que tiene un lado perpendicular a sus bases o que simplemente tiene un ángulo recto. Tiene dos ángulos internos rectos, uno agudo y otro obtuso.



Trapecio isósceles: Es el que tiene los lados no paralelos de igual medida.
Tiene dos ángulos internos agudos y dos obtusos, que son iguales entre sí. Las diagonales son congruentes.



Trapecio escaleno: Es el que no es isósceles ni rectángulo, la medida de sus lados da como resultado medidas diferentes. Sus cuatro ángulos internos poseen diferentes medidas.

4.5 CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA:

a) Círculo:

En geometría, es el conjunto de los puntos de un plano que se encuentran contenidos en una circunferencia. El círculo tiene un área.

b) Circunferencia:

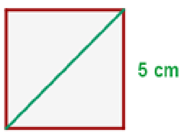
Es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de otro fijo, llamado centro; esta distancia se denomina radio. Sólo posee longitud.

La circunferencia de centro en el origen de coordenadas y radio 1 se denomina circunferencia unidad. Es una curva bidimensional con infinitos ejes de simetría y sus aplicaciones son muy numerosas.

4.6 Áreas y perímetros:

Determine el área y el perímetro de las siguientes figuras:

1.

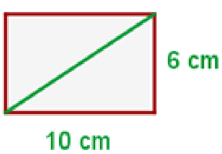


El perímetro (**p**) del cuadrado es la sumatoria de todos sus lados= 5+5+5+5= 20

P= 4 (5) = 20 cm

El área (**a**) = l^2= 5^2 = 25 cm^2

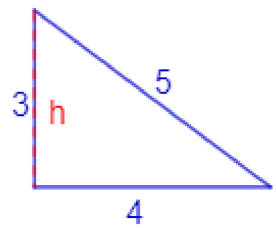
2.



P= 2(10) + 2 (6) = 20+ 12= 32 cm

A= 10 (6) = 60 cm^2

3. El área del triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 es :

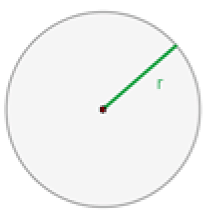


$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \\ = \frac{4 \cdot 3}{2} = \\ = \frac{12}{2} = 6$$

Unidades cuadradas (u^2)

P= 3+4+5= 12 unidades (u)

4. Calcular el área de un círculo de 5 m de radio y la longitud de su circunferencia. Ver figura



A= $\pi(5^2) = 25\pi$ metros cuadrados
P = 2π *(5) = 10*π *metros*

HOJA DE EJERCICIOS -PROPORCIONALIDAD

Valor desconocido y porcentaje

Encuentre el valor del elemento que falta en cada una de las siguientes proporciones:

1. $\frac{7}{14}=\frac{y}{10}$ 2. $\frac{3}{7}=\frac{z}{28}$ 3. $\frac{y}{5}=\frac{8}{20}$ 4. $\frac{5}{m}=\frac{15}{9}$ 5. $\frac{3}{5}=\frac{12}{m}$

Resuelva los siguientes problemas:

6. ¿Cuál es el 25% de 150?

7. ¿De qué número es 480 es el 30%?

8. ¿Qué porcentaje de 270 es 54?

9. Una tienda de electrodomésticos decide dar 30% de descuento en toda su mercadería, si el precio normal de una televisión es Q6000.00. ¿Cuánto pagará en la caja?

10. Alejandra compro un refrigerador en Q350.00, el precio incluía un 30% de descuento. ¿Cuál era el precio sin descuento?

11. Los audífonos de Liza están valuados en 25% más que los de Karen, si los de Karen tienen un precio de Q600.00. ¿Cuánto costaran los de Liza?

12. En una caja hay 8 cincos azules, 5 rojos y 7 verdes. ¿Cuál es el porcentaje de cincos rojos?

13. Un salón tiene capacidad de 80 alumnos, 20% se presentan puntualmente. ¿Cuántos alumnos se presentan impuntualmente?

14. Un equipo de básquetbol tuvo 30 derrotas durante 80 juegos. ¿Cuál es el porcentaje de victorias?

15. Para aprobar una evaluación que tiene 60 preguntas, Manuel tiene que contestar correctamente 75% de esta evaluación. ¿Cuál es el mínimo de preguntas que deberá contestar correctamente para aprobar esta evaluación

16. Un depósito de leche con capacidad de 800 litros está lleno en dos quintas parte, si se agregan 80 litros más. ¿Qué porcentaje del contenedor se encuentra lleno?

17. Sin una escuela hay 400 alumnos, de los cuales 100 son mujeres. ¿Cuál es el porcentaje de hombres?

18. El precio de una calculadora científica aumento de Q250.00 a Q325.00. ¿Cuál es el porcentaje de incremento?

19. Una tienda anunciaba un artículo con 10% de descuento para un ahorro de Q30.00. ¿Cuál era el precio original?

20. Hoy un artículo tienen un precio de Q90.00. Si el próximo mes aumentar el precio en un 200%. ¿Cuál será el nuevo precio?

Respuesta a los ejercicios pares:

2) 12

4) 3

6) 37.5

8) 20%

10) Q500.00

12) 25%

14) 62.5%

16) 50%

18) 30%

20) Q270.00

EVALUACIÓN:

1. Encuentre el valor desconocido de la siguiente proporción: $\frac{90}{9} = \frac{w}{1}$
   a) 1/9 b) 9 c) 10 d) 18

2. ¿Cuál es el 5% de 60?
   a) 3 b) 30 c) 6 d) 60

3. ¿Qué porcentaje representa 15 de 375?
   a) 8% b) 10% c) 5% d) 4%

4. ¿De que número 43 es el 86%?
   a) 30 b) 50 c) 120 d) 45

5. Una persona compra un articulo en Q300.00 y quiere venderlo para ganar el 20%. ¿A qué precio lo vende?
   a) Q360.00 b) Q420.00 c) Q310.00 d) Q400.00

Respuestas de la evaluación:

1. c
2. a
3. d
4. b
5. a

HOJAS DE EJERCICIOS - Operaciones algebraicas

1. Suma los siguientes polinomios $3x-8y-2z$; $7x+3y+z$
2. ¿Cuál es la suma de $-5m-2n+6$ con $2m+2n-8$?
3. Realiza $(11a-b)+(-8a+c)$
4. Efectúa $(3p-5q-6r)+(2p+3q-2r)+(-12p+4q+r)$
5. Suma $6x^2+3x-2$ con $-x^2+7x+4$
6. Realiza la siguiente operación: $(4a-2b-5c)-(3a-7b-5c)$
7. De $16x^2-7x-8$ restar $6x^2-3x+6$
8. ¿Cuál es el resultado de $(3x^3-5x^2-6x+3)-(2x^3+4x-8)$
9. Restar $8x-3y-6$ de $5x+4y-1$
10. Realiza $(a^2+a-1)-(a^2-a+1)$
11. Realiza $(-abc)(3ac)$
12. Resuelve $5x(3x+6)$
13. Efectúa $(x-7)(x+2)$
14. Obtén el resultado de $(x+y)(x^2+2xy+y^2)$
15. ¿Cuál es el resultado de $(a+b-c)(a-b+c)$
16. Efectúa la siguiente operación $\frac{3x^2-5x+2}{3x-2}$
17. Resuelve la siguiente operación $(5a^2+8ab-21b^2) \div (a+3b)$
18. Resuelve $2x^3-4x-2 / 2x+2$
19. Obtén el resultado de $(-15x^2+22xy-8y^2) \div (-3x+2y)$
20. Realiza $(x^4-9x^2+x+3) : (x+3)$
21. Si $x=5$ ¿Cuál es el valor de la expresión x^2-25?
22. Si $y=2$ ¿Cuál es el valor de expresión y^2+2y+1?
23. Si $x=4$ ¿Cuál es el valor de la expresión x^2-2x+1?
24. Si $x=2$ y $y=3$ ¿Cuál es el valor de la expresión $x^2+2xy+y^2$?
25. Si $x=6$ y $y=5$ ¿Cuál es el valor de la expresión x^2-y^2?

Respuesta a los ejercicios pares:

2) $-3m-2$	4) $-7p+2q-7r$	6) $a+5b$	8) $x^3-5x^2-10x+11$
10) $2a-2$	12) $15x^2+30x$	14) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	16) $x-1$
18) x^2-x-1	20) x^3-3x^2+1	22) 9	24) 25

EVALUACIÓN:

1. ¿Cuál es el resultado de operar $(4x^2-5x+8) + (5x^2+3x-8)$?

a) $9x^2-2x+16$ b) $9x^2+2x-16$ c) x^2+16 d) $9x^2-2x$

2. ¿Qué se obtiene de realizar la siguiente operación? $(x^3+5xy-y^3) - (2x^3-xy-y^3)$

a) x^3-4xy b) $3x^3+4xy-2y^3$ c) $-x^3+4xy$ d) $3x^3-4xy+2y^3$

3. al efectuar la siguiente operación $(3x^2+4)(5x^2-4)$ ¿Cuál es el resultado?

a) $15x^2+8x^2-16$ b) $15x^2-8x^2+16$ c) $15x^2-16$ d) $15x^2+16$

4. ¿Cuál es el resultado de operar $(45x^6-28x^4-9x^2-56) \div (5x^2-7)$?

a) $7x^2+8x-5$ b) $9x^4+7x^2+8$ c) $8x^2+9x+7$ d) $4x^4-5x^2+8$

5. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación? $\frac{x^5-6x^3+5x^2+9x-15}{x^3-3x+5}$

a) x^2-3 b) $x^4+5x^3-7x^2+8x-3$ c) $x^4+5x^3-7x^2+8x-3$ d) x^3+x-4

Respuesta de la evaluación:

1. d
2. c
3. a
4. b
5. a

HOJA DE EJERCICIOS - Factorización

Factorice completamente las siguientes expresiones algebraicas:

1. $3a^3-a^2$
2. $9x^2+6x+3$
3. $25b^2+35b^4-45b^8$
4. $16x^3y^2-8x^4y-24x^2y^3-40xy^4$
5. $x^5-x^4+x^3-x^2+x$
6. $2x^2-18$
7. $100-16x^2$
8. $4a^4-9b^2c^2$
9. a^4-b^4
10. $49x^2-64y^2$
11. a^3-64b^3
12. $8x^3y^3+27$
13. $3y^3+375$
14. $8s^3-125t^6$
15. $1-216m^9$
16. $a^2-8a+16$
17. $4x^2-20xy+25y^2$
18. $2m^2+4m+2$
19. $a^2+18a+81$
20. $100a^4-60a^2b+9b^2$
21. $x^2+11x+24$
22. $m^2-13m+30$
23. $x^2-7x-18$
24. $x^2+xy-20y^2$
25. $a^2-16a-36$
26. $6x^2-7x-3$
27. $8x^4-19x^2+6$
28. $2b^2+29b+90$
29. $20x^2+x-1$
30. $4n^2+15n+9$
31. $a^2+ab+ax+bx$
32. $x^3-3x^2-4x+12$
33. $5ru+10vr+2ut+4vt$
34. $2x^2y+xy-2xz-z$
35. x^3-2x^2+4x-8
36. $2x^3-12x^2+24x-16$
37. $64x^9-125y^{12}-240x^6y^4+300x^3y^8$
38. $125x^3+75x^2+15x+1$
39. $8a^3b^3-12a^2b^2+6ab-1$
40. $27-27x+9x^2-x^3$

Respuesta a los ejercicios pares:

2) $3(3x^2+2x+1)$ 4) $8xy(2x^2y-x^3-3xy^2-5y^3)$

6) $2(x-3)(x+3)$ 8) $(2a^2-3bc)(2a^2+3bc)$

10) $(7x+8y)(7x-8y)$ 12) $/2xy+3)(4x^2y^2-6xy+9)$

14) $(2s-5t^2)(4s^2+10st^2+25t^4)$ 16) $(a-4)^2$

18) $2(m+1)^2$ 20) $(10a^2-3b)^2$

22) $(m-10)(m-3)$ 24) $(x+5y)(x-4y)$

26) $(3x+1)(2x-3)$ 28) $(2b+9)(b+10)$

30) $(4n+3)(n+3)$ 32) $(x-3)(x+2)(x-2)$

34) $(2x+1)(xy-z)$ 36) $2(x-2)^3$

38) $(5x+1)^3$ 40) $(3-x)^3$

EVALUACIÓN:

1. Al factorizar completamente el siguiente polinomio $9x^2-6x+1$ el resultado correcto es:
   a) $(3x+1)^2$ b) $(3x+1)(3x-1)$ c) $(3x-1)^2$ d) $(3x+1)(3x+1)$

2. Si factorizo completamente $6x^4y^5-8x^3y^6$ tenemos el resultado siguiente:
   a) $2x^3y^5(3x-4y)$ b) $2x^4y^6(xy-4xy)$ c) $2x^3y^5(3-4y)$ d) $2x^3y^5(3x-4)$

3. Al factorizar completamente $21x^4+91x^3-12x-52$ el resultado correcto son los siguientes factores:
   a) $(7x^3-26)$ $(3x+2)$ b) $(3x^3-2)(2x+26)$ c) $(3x+13)(7x^3-4)$ d) $(7x-4)(3x^3+13)$

4. Si se factora completamente el polinomio algebraico $169x^2-9y^2$ tenemos el resultado siguiente:
   a) $(3y-13x)((3y+13x)$ b) $(3y-13x)(3y-13x)$ c) $(13x+3y)(13+3y)$ d) $(13x-3y)(13x+3y)$

5. El resultado de factorizar completamente x^2+9 es:
   a) $(x+3)(x-3)$ b) x^2+9 c) $(x+3)(x+3)$ d) $(x-3)(x-3)$

6. Si factorizamos completamente al polinomio $216m^3-n^3$ el resultado es:
   a) $(6m-n)(36m^2+6mn+n^2)$ b) $(6m-n)(36m^2-6mn+n^2)$ c) $(6m-n)^3$ d) $(6m+n)^3$

7. El resultado de factorizar completamente a $9x^2-48x+63$ es:
   a) $(3x-8)^2$ b) $(3x-9)(3x+7)$ c) $(3x+8)^2$ d) $3(x-3)(3x-7)$

8. Al factorizar completamente el siguiente polinomio $125x^3+225x^2y^3+135xy^6+27y^9$ el resultado es:
   a) $(5x+3y)^3$ b) $(5x-3y)^3$ c) $(5x-3y)^2$ d) $(5x+3y)^2$

9. El resultado de factorizar completamente a $x^2-24x +140$ es:
   a) $(x+14)\ (x+10)$ b) $(x-14)^2$ c) $(x-10)\ (x-14)$ d) $(x+14)^2$

10. Si se factora el siguiente polinomio algebraico x^2+x+1 el resultado es:
   a) x^2+x+1 b) $(x+1)^2$ c) $(x+1)\ (x+1)$ d) $(x+1)\ (x+1)$

Respuestas de la evaluación:

1. c
2. a
3. c
4. d
5. b
6. a
7. d
8. b
9. c
10. a

HOJA DE EJERCICIOS
ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: Resuelva las siguientes ecuaciones, dejando constancia de su procedimiento y determine el valor de la incógnita.

1. $2y - 34 = -20$
2. $4z + 3 = 3z + 5$
3. $-3a + 3 = -2a$
4. $10(d - 2) = 1$
5. $c + (c + 2) = 36$
6. $3(e - 2) + 9 = 0$
7. $8m - 5 = 3 - 2 + 2m$
8. $5y - 10 = -12 + 4y$
9. $3t - 21 + 4 = 5t - 5$
10. $2y + y - 2 + 4 = 35 + 3 - 9y$
11. $15n = 2(1 + 9n) - 3$
12. $2x - (10 - 4x) = 20$
13. $11y - 5y + 6 = -24 - 9y$
14. $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$
15. $y + 1 = [2y - (3y + 1)]$
16. $\frac{2y}{2} = 10$
17. $5 = 3 + \frac{y}{4}$
18. $20 + 2 = 2 + \frac{5p}{2}$
19. $\frac{5h-6}{4} = 4h - 7$
20. $\frac{f+2}{3} = 5f - 4$

REPUESTA A EJERCICIOS PARES ECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA.

2. 2
4. 21/10
6. -1
8. -2
10. 3
12. 5
14. 6
16. 10
18. 8
20. 1

EVALUACIÓN ECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA.

Instrucciones: Resuelva y simplifique las siguientes ecuaciones, dejando constancia de su procedimiento y determine el valor de la incógnita. Subraye la respuesta correcta.

1. Determine el valor de la incógnita ***g*** de la siguiente ecuación $\mathbf{2g - 9 = 2(3 - 4g)}$:

a) 15　　b) 3　　c) 3/2　　d) 15/10

2. Determine el valor de la incógnita ***e*** de la siguiente ecuación $\mathbf{e + 4 = 2 + \frac{3e}{2}}$:

a) 2　　b) 4　　c) 4/5　　d) 3/2

3. Determine el valor de la incógnita ***y*** de la siguiente ecuación $\mathbf{9y - 45 = 16 + 4 - 4y}$:

a) 65　　b) 13　　c) 65/13　　d) 5

4. Determine el valor de la incógnita ***a*** de la siguiente ecuación $\mathbf{5a - 10 = 4a - 12}$:

a) -2　　b) 5　　c) 5/10　　d) 2

5. Determine el valor de la incógnita ***x*** de la siguiente ecuación $\mathbf{4[2x - 5(x - 2)] = 2(3x + 2)}$

a) -18　　b) -36　　c) -36/-18　　d) 2

REPUESTA A EVALUACIÓN ECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA.

1. c
2. b
3. d
4. a
5. d

HOJA DE EJERCICIOS
ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: Resuelva las siguientes ecuaciones, dejando constancia de su procedimiento y determine el valor de la incógnita.

1. $y^2 - 7y + 12 = 0$
2. $y^2 + 6y = -9$
3. $y^2 - 6y + 9 = 0$
4. $m^2 + 10m + 25 = 0$
5. $p^2 + 9 = 10p$
6. $n^2 = 2n + 3$
7. $y^2 + 3y = 88$
8. $4f^2 + 4f = 3$
9. $2g^2 + 10g = 48$
10. $4x^2 + 12x = -9$
11. $3j^2 - 16j + 5 = 0$
12. $2w^2 - 20w + 42 = 0$
13. $-5c^2 + 13c + 6 = 0$
14. $2d^2 + 3d = -5$
15. $9t^2 - 24t + 16 = 0$
16. $(x + 3)(2x - 1) = 9$
17. $(y + 5)(y - 2) = 0$
18. $(x + 5)^2 = 9$
19. $(x + 7)^2 - 25 = 0$
20. $6x^2 + x - 2 = 0$

REPUESTA A EJERCICIOS PARES ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCOGNITA.

2. y = -3
4. m = -5
6. n = -1 y n = 3
8. f= -3/2 y f= 1/2
10. x = -3/2
12. w = 7 y w = 3
14. d= 1 y d= -5/2
16. x=-4 y x=3/2
18. x=-2 y x=8
20. x=1/2 y x=-2/3

EVALUACIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA.

Instrucciones: Resuelva y simplifique las siguientes ecuaciones, dejando constancia de su procedimiento y determine el valor o los valores de la incógnita. Subraye la o la respuesta(s) correcta(s).

1. Determine el valor de la incógnita $\boldsymbol{y}$ de la siguiente ecuación $\boldsymbol{y^2+5y+4=0}$:

a) y=4 b) y=-4 c) y=1 d) y=-1

2. Determine el valor de la incógnita $\boldsymbol{c}$ de la siguiente ecuación $\boldsymbol{2c^2+5c=-2}$:

a) -2 b) 2 c) 1/2 d) -1/2

3. Determine el valor de la incógnita $\boldsymbol{m}$ de la siguiente ecuación $\boldsymbol{-3m^2+7m+6=0}$:

a) 3 b) -3 c) -2/3 d) 2/3

4. El valor de la incógnita $\boldsymbol{x}$ en la ecuación $\boldsymbol{(x-2)(x+2)-7(x-1)=21}$ es:

a) 2 b) -2 c) -9 d) 9

5. Determine el valor de la incógnita $\boldsymbol{y}$ de la siguiente ecuación $\boldsymbol{y^2-y+\frac{1}{4}=0}$

a) 1/2 b) -1/2 c) 1/4 d) -1/4

REPUESTA A EVALUACIÓN ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCOGNITA.

1. b y d
2. a y d
3. a y c
4. b y c
5. a

HOJA DE EJERCICIOS
INECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Instrucciones: Resuelva las siguientes inecuaciones y represente la respuesta de tres maneras: como desigualdad, como conjunto y de forma gráfica.
Recomendación: Auxiliarse del texto de apoyo de matemáticas en donde se desarrolla el tema.

1. $\mathbf{5t + 3 \geq 2t + 9}$
2. $\mathbf{2y - 3 > y + 5}$
3. $\mathbf{8m + 16 > 4m - 8}$
4. $\mathbf{x < 4}$
5. $\mathbf{a \geq 4 + 3}$
6. $\mathbf{3x - 6 \geq x + 3}$
7. $\mathbf{3 - 2m \geq 7}$
8. $\mathbf{3x - 14 \leq 7x - 2}$
9. $\mathbf{-c + 5 \leq 2c + 2}$
10. $\mathbf{8y + 16 > 4y - 8}$

REPUESTA A EJERCICIOS PARES INECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA.

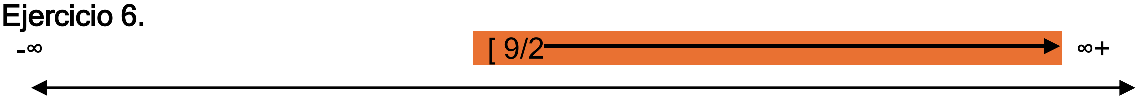
Ejercicio 2.

Desigualdad = y>8, Intervalo = (8, ∞+) Conjunto = $\{x \in R/y > 8\}$

Ejercicio 4.

Desigualdad = x<4, Intervalo = (-∞, 4), Conjunto = $\{x \in R/x < 4\}$

Ejercicio 6.



Desigualdad = x≥9/2, Intervalo = [9/2, ∞+), Conjunto = $\left\{x \in R/x \geq \frac{9}{2}\right\}$

Ejercicio 8.

Desigualdad = -3≤x, Intervalo = [-3, ∞+), Conjunto = $\{x \in R/x \leq -3\}$

Ejercicio 10.

Desigualdad = y>-6, Intervalo = (-6, ∞+), Conjunto = $\{x \in R/y > -6\}$

EVALUACIÓN INECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA.

Instrucciones: Resuelva y simplifique las siguientes inecuaciones, dejando constancia de su procedimiento. Subraye la respuesta correcta.

1. La solución de la inecuación $\mathbf{2y - 8 < 0}$ es:

a) y>4 b) y<8 c) y>8 d) y<4

2. El rango de la inecuación $\mathbf{-5t + 8 > 7}$ es:

a) (-∞, 1/5) b) (1/5, +∞) c) (-∞, -1/5) d) (-1/5, +∞)

3. La solución de la inecuación $\mathbf{9y - 45 \leq 16 + 4 - 4y}$ es:

a) y≤65/13 b) y<65/13 c) y>65/13 d) y≥65/13

4. El rango de la inecuación $\mathbf{f + 8 \leq 3f + 1}$ es:

a) (-∞, 7/4) b) [7/4, +∞) c) (-7/4, +∞) d) [-7/4, +∞)

5. La solución de la inecuación $\mathbf{2w + 1 \geq 3 + w - 1}$ es:

a) w>1 b) w<1 c) w≤1 d) w≥1

REPUESTA A EVALUACIÓN ECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA.

1. d
2. c
3. a
4. b
5. d

HOJA DE TRABAJO
FUNCIONES LINEALES

¿Cuál es la ecuación de la recta que cumple las siguientes condiciones:

1. Pendiente $m = ½$ intercepto $b = 2$
2. $m = 2/3$ $b = -2$
3. $m = - 1/3$ $b = 3$
4. $m = -2$ $b = -3$
5. $m = -5/4$ $b = 2$
6. $m = 4/7$ $b = 3/4$
7. $m = 1/8$ $b = - 5/2$
8. $m = - 5/2$ $b = - 9/4$
9. $m = - 7/9$ $b = - ¾$
10. $m = 4$ $b = -3/2$

¿Cuál es la ecuación de la recta que cumple las siguientes condiciones:

11. $m = ¾$ Pasa por el punto (2,3)
12. $m = 4/3$ Pasa por el punto (2,-3)
13. $m = - 1/2$ Pasa por el punto (-2,4)
14. $m = - 2$ Pasa por el punto (-1,-5)
15. $m = + 3$ Pasa por el punto (-3,-1)
16. $m = 5/8$ Pasa por el punto (2,3)
17. $m = -3/4$ Pasa por el punto (3,-3)
18. $m = 2/5$ Pasa por el punto (-4,3)
19. $m = 5/2$ Pasa por el punto (5/6,3/4)
20. $m = 6/7$ Pasa por el punto (6/5,-3/2)

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos…?

21. A (5,0) B (0,6)
22. A (0,5) B (10,-3)
23. A (2,-3) B (-2,7)
24. A (-4,-1) B (-6,-7)
25. A (-3,-5) B (5,-8)
26. A (-1,1) B (7,3)
27. A (1,2) B (6,-6)
28. A (-6,3) B (5,-2)
29. A (-5,4) B (-3,-1)
30. A (5,5) B (0,-6)

Para las siguientes funciones: A) Encuentre el valor de la variable Y cuando X adopta valores de -5, 0 y 5. B) Encuentre el valor de X cuando Y adopta valores de -5, 0 y 5. C) Represente la función en una gráfica

31. $y = 2$
32. $y = -5$

33. y = 4/3
34. y = -1/5
35. y = 7/8
36. y = 2x + 2
37. y = ½ x - 5
38. y = -3/5 x + 7
39. y = -2/3 x - 8
40. y = 2x + (-4)

Resuelva los siguientes problemas:

41. Inicialmente una planta medía 5 cm de altura y ha estado creciendo a razón de 2 cm cada semana. A) Exprese la altura de la planta como una función lineal del tiempo en semanas, y B) ¿Que altura tendrá dicha planta a las 5 semanas?
42. Un vehículo consume un galón de combustible por cada 40 km que recorre (1 gal / 40 km) y tiene un tanque con capacidad de 10 galones. A) Exprese la cantidad de combustible que queda en el tanque como una función de la distancia recorrida. B) ¿Cuánto combustible habrá consumido dicho vehículo si ha recorrido un total de 200 km?
43. En una región, la demanda de tomate (y, expresada en libras) en función del precio (x, expresado en quetzales) está dada por y = -1500 x + 7,000. A) ¿Qué significa el -1500? B) ¿Qué quiere decir el 7,000? C) ¿Cuál es la demanda de tomate si el precio es de Q2?

Respuestas de los ejercicios pares

2. y = 2/3 x - 2
4. y = -2 x - 3
6. y = 4/7 x + 3/4
8. y = - 5/2 x - 9/4
10. y = 4 x - 3/2
12. y = 4/3 x - 17/3
14. y = - 2 x - 7
16. y = 5/8 x + 7/4
18. y = 2/5 x + 23/5
20. y = 6/7 x - 177/70
22. y = -4/5 x + 5
24. y = 3x + 11
26. y = ¼ x + 5/4
28. y = -5/11 x + 3/11
30. y = 11/5 x - 6
32. A) -5, -5 y -5 B) Indefinido, puede adoptar cualquier valor.
34. A) -1/5, -1/5, -1/5 B) Indefinido, puede adoptar cualquier valor.
36. A) -8, 2, 12 B) - 7/2, 2, 3/2
38. A) 10, 7, 4 B) 20, 35/3, 10/3
40. A) - 14, -4, 6 B) - ½, 2, 9/2
42. 42.A) y = - 1/40 x + 10

EVALUACIÓN
FUNCIONES LINEALES

1. ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente de 2/3 y un intercepto en ¾?

   a) Y = ¾ X – 2/3   b) Y = - 2/3 X – 3/4   c) Y = 2/3 X - 3/4   d) Y = 2/3 X + 3/4

2. ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente 1/7 y pasa por el punto (-2, 3/2)

   a) Y = 1/7 X – 2   b) Y = 1/7 X + 3/2   c) Y = 1/7 X + 25/14   d) Y = 1/7 X - 3/2

3. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos A (2,3) y B(-2,-5)?

   a) Y = 2X – 1   b) Y = -1 X + 2   c) Y = X - 2   d) Y = -2X + 1

4. En la ecuación y = -2/5 x – 4/5, ¿cuál es el valor que adopta x cuando y = -3?

   a) x = 2/11   b) x = 11/2   c) x = 2/5   d) Y = -2/5

5. ¿Qué peso tendrá un lechón al cabo de dos semanas si tenía un peso inicial de 3 kg e incrementa su peso a razón de 200 g cada día?

   a) 3.4 kg   b) 2803 kg   c) 10 kg   d) 5.8 kg

Respuesta de la evaluación:
1.d
2.c
3.a
4.b
5.d

HOJA DE TRABAJO
TEOREMA DE PITÁGORAS, ÁREA Y PERÍMETRO DE FIGURAS BÁSICAS

1. Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 4 centímetros.
2. Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm cada uno.
3. Calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden $\sqrt{4}$ y $\sqrt{5}$.
4. Calcular el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 35 cm y el otro cateto mide 17 cm.
5. Calcular la altura que se puede alcanzar con una escalera de 5 m apoyada sobre una pared si la parte inferior se sitúa a 1.2 m de esta.
6. Usted puede ver que en las tiendas de electrodomésticos los televisores se ofrecen indicando la cantidad de pulgadas que tiene la pantalla. Esta longitud representa la diagonal que va desde una esquina del televisor hacia la otra. Si David desea colocar un televisor en un espacio de 96 cm x 79 cm, ¿de cuántas pulgadas debe ser la pantalla del televisor? Tome en cuenta que 1 pulgada es equivalente a 2.54 cm.
7. Se desea instalar un canopy desde la rama de un árbol ubicada a una altura de 35 m hasta un punto a nivel del suelo a 200 metros del árbol. Considerando que el suelo es plano, ¿cuál es la longitud del cable que debe utilizarse?
8. Calcule el área de un triángulo de base 12 pulgadas y altura de 20 cm.
9. ¿Cuál es el área y perímetro de un cuadrado cuyo lado mide 17 cm?
10. Si un cuadrado tiene un área de 81 cm2, ¿cuánto mide cada uno de sus lados y su perímetro?
11. ¿Cuál es el área y perímetro de un rectángulo cuyos lados (perpendiculares) miden 7 cm y 15 cm?
12. Si un rectángulo tiene un perímetro de 54 cm y uno de sus lados mide 12 cm, ¿cuánto mide su otro lado (perpendicular al primero) y de cuánto es su área?
13. ¿Cuál es el área y perímetro de un trapecio isósceles cuya medidas son: base mayor de 10 m, base menor de 7 m y altura de 5 m?
14. ¿Cuál es el área y perímetro en pies de un trapecio isósceles cuya medidas son: base mayor de 12 m, base menor de 7 m y altura de 4 m?
15. ¿Cuál es el área y perímetro de un rombo cuya diagonal mayor es de 15 pulgadas y cuya diagonal menor es de 10 pulgadas?
16. ¿Cuál es el área y perímetro en centímetros de un rombo cuya diagonal mayor es de 21 pulgadas y cuya diagonal menor es de 8 pulgadas?
17. Calcule el área y perímetro de un pentágono cuyo lado mide 7 cm y cuyo apotema mide 4 cm.
18. Calcule el área y perímetro en pulgadas de un pentágono que tiene 8 cm por lado y 5 cm de apotema.
19. Calcule el área y perímetro de un hexágono que tiene 16 cm por lado y 8 cm de apotema.
20. Un hexágono tiene un perímetro de 30 pies y un apotema de 3 pies. Calcule la longitud de cada lado y su área en pulgadas cuadradas.
21. Calcule el área y perímetro en metros de un círculo que tiene un radio de 14 pies.
22. Calcule el radio y perímetro en pies de un círculo cuya área es equivalente a 30 metros cuadrados.

Respuestas de los ejercicios pares:
2. 83 cm
4. 30.59 cm
6. 48.95 cm
8. 304.8 cm^2 ó 27.24 $pulg^2$.
10. 9 cm y 36 cm.
12. 15 cm y 180 cm^2.
14. 408.82 pie^2 y 93.26 pies.
16. 541.93 cm^2 y 114.16 cm.
18. 15.5 $pulg^2$ y 15.75 pulg.
20. 60 pulg y 6,480 $pulg^2$.
22. 10.14 pies y 63.69 pies.

EVALUACIÓN
TEOREMA DE PITÁGORAS, ÁREA Y PERÍMETRO DE FIGURAS BÁSICAS

1. ¿Cuánto mide la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene catetos de 3.8 y 4.58 m?

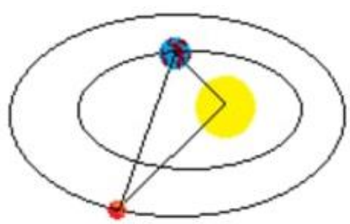
   a) 5.68 m   b) 5.95 cm   c) 2.75 m   d) Ninguna de las anteriores

2. ¿Cuánto mide el cateto de un triángulo cuya hipotenusa mide 8.75 m y uno de sus catetos mide 10 m?

   a) 13.29 m   b) 4.84 m   c) – 4.84 m   d) Ninguna de las anteriores

   (*tome en cuenta que la hipotenusa no puede ser menor que alguno de sus catetos)

3. Suponiendo que la tierra (azul), marte (rojo) y el sol (amarillo) se encuentran por un momento formando un triángulo rectángulo. Calcule la distancia entre la tierra y marte sabiendo que la distancia entre la tierra y el sol es de 150 millones de kilómetros y la distancia entre marte y el sol es de 225 millones de kilómetros.



a) 270.42 millones km   b) 250 km   c) 250 años luz   d) Ninguna de las anteriores

4. Calcule el área de un triángulo de base 12 pulgadas y altura de 1.5 pies cm.

a) 9 $pulg^2$ b) 9 cm^2 c) 216 $pulg^2$ d) 0.75 pie^2

5. Si un cuadrado tiene un área de 114 cm2, ¿cuánto mide su perímetro?

a) 28.5 cm b) 42.71 cm^2 c) 16.81 pulg d) 10.68 cm

6. ¿Cuál es el perímetro de un trapecio isósceles cuya medidas son: base mayor de 15 m, base menor de 8 m y altura de 5 m?

a) 35.21 m b) 57.5 m c) 93 m d) 6.10 m

7. Calcule el perímetro de un círculo cuya área es equivalente a 100 metros cuadrados.

a) 10 m b) 13.96 pulg c) 35.45 cm d) 78.74 pulg

Respuesta de la evaluación:

1.d
2.d
3.a
4. d
5. c
6. a
7. b

BIBLIOGRAFÍA

1. Ardón López, CE. 2008. Aritmética y algebra para estudiantes de agronomía y dasonomía: Guía de estudio. Guatemala, ENCA. 276 p.
2. Duarte Beza, S ; Rodríguez, JE. 1996. Matemáticas 1. Guatemala, Santillana. 144 p.
3. Joya Vega, A ; Chizner Ramos, JA. 2010. Hipertexto matemáticas 7. Colombia. Santillana. 256 p.

ENLACES A VÍDEOS QUE SE PUEDEN CONSULTAR

Clasificación de los números
https://www.youtube.com/watch?v=rtNC7g1h_JA

Propiedades de la suma y la multiplicación
https://www.youtube.com/watch?v=18vc-DZiRSU

Jerarquía operativa
https://www.youtube.com/watch?v=FIjylOufxyU
https://www.youtube.com/watch?v=FDJ7nu8f6Js

Factorización números naturales en factores primos
https://www.youtube.com/watch?v=NPaBFe6QBDQ
https://www.youtube.com/watch?v=sHe8iCJaObw

MCM
https://www.youtube.com/watch?v=txLlA_fyL5g
https://www.youtube.com/watch?v=XmRg6UBOBiA
https://www.youtube.com/watch?v=L9PNc2CBSxc

MCD
https://www.youtube.com/watch?v=UbJEo0Sc3XY
https://www.youtube.com/watch?v=SErd-du3RMc
https://www.youtube.com/watch?v=0N_-gYpGJiE

Operaciones con fracciones

https://www.youtube.com/watch?v=3HNyVbBNGQQ
https://www.youtube.com/watch?v=antZqj9ePys
https://www.youtube.com/watch?v=LVHo5xvsvO0
https://www.youtube.com/watch?v=efz0Efj5Big
https://www.youtube.com/watch?v=FRPijN0ie3U
https://www.youtube.com/watch?v=jvNr-n3KZ5A
https://www.youtube.com/watch?v=HKz0OB5imBM
https://www.youtube.com/watch?v=RNtvQitNbLk
https://www.youtube.com/watch?v=LgMptyzudXU
https://www.youtube.com/watch?v=KDDcZCvgx5k